



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

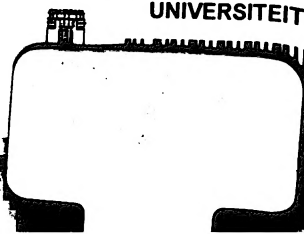
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

4.585

2 27

March 1885

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



000070582



Gottfr. Eichler del.

Jac. Andr. Friedrich Sc. Duc. Würt. Sculptor aulicus Sc.

Heinrich Wilhelm Clemm,;
Prof. der Theologie auf der Universität
Tübingen u. u.

Erste Gründe
aller
mathematischen
Wissenschaften.

Zweyte Auflage.



Stuttgart,
verlegt Johann Benedict Metzler,
1769,



Vorbericht

Größtentheile in deutscher Sprache lesen, und sich bekannt machen wollen.

Nun weiß ich nicht, wie weit ich diesen Wunsch erfüllet habe; so viel kann ich vorläufig melden, daß viele von meinen Zuhörern, welchen ich, diesen Sommer über, die einzelne aus der Druckerey nach und nach gekommene Bögen erklärt habe, ehe sie mich noch hörten, das meiste verstanden, und von sich selbst durch das bloße Lesen begriffen haben; daher billig vermuthet, daß diese Schrift bey andern aufmerksamen Lesern eine gleiche Wirkung haben, und vielleicht mit mehrerem Vergnügen gelesen werde, als manche bloß zum Zeitvertreib gekaufte Bücher.

Die Absicht, warum ich schreibe, hiesse mich also vorzüglich faßlich und deutlich seyn. Darum mußte ich zuweilen weitläufig werden. Aus eben
Dies

diesem Grunde vermiede ich das schulmäßige in der Schreibart, und erwählte für die am Rand sonst benzesetzte Rahmen der Grund = Lehr = Zusätze, u. s. w. solche Marginalien, welche dem Leser den Inhalt des Textes viel deutlicher, als diese Worte, sagen. Wann man die Marginalien selbst in kurze Sätze verwandelt, so hat man einen Auszug oder eine Sammlung von Erklärungen und Lehrsätzen, die ich selbst in dieser Form würde angehängt haben, wenn ich es für nöthig erachtet hätte, einerley Sachen zweymal zu sagen, oder die Mathematik in ein Gedächtniswerk zu verwandeln.

Was die Figuren betrifft, so hat man deren zwar nicht viel, aber doch soviel, als man nöthig hat. Ich habe auch dißfalls die Lehrart der Alten, welche ihre Zeichnungen so kurz, als möglich war, vorgetragen hatten, um

Vorbericht

so eher befolget, weil oft manche Leser die allzumal Figuren entweder bloß bewundern, oder auch gar eben wegen ihrer Menge scheuen. Beedes habe ich zu vermeiden gesucht. Man findet daher in den meinigen bloß die Euclidische und einige neuere Zeichnungen, aber keine Malereien.

Bei der Ausarbeitung des Werks selbst habe ich mich der Deutlichkeit, aber einer solchen, welche denen, die aus andern Schriften schon die Mathematik erlernt hatten, durch keine unnöthige Neuerungen verdrüsslich werden sollte. Darum habe ich die vom Herrn Baron von Wolf geschöpfte Namen und Ausdrücke mehrtheils beibehalten, ob ich schon übrigens die Mathematik in einem ganz andern Kleide vorstelle.

Wie

zur ersten Auflage.

Wie ich nun von meinen ehemaligen Lehrern, dem seligen Herrn Professor Krafft, und von dem weitberühmten Herrn Professor Euler zu Petersburg in dieser Wissenschaft nicht wenig gelernt habe, so wird man nach beliebiger Durchblätterung des Werkes bey denjenigen Stellen, wo ich ihre Schriften anführe, die Beweise meiner Hochachtung und Dankbarkeit gegen diese Männer erkennen, zugleich aber auch urtheilen, wieferne ich nach dem Zweck dieses Buchs eine eigene Arbeit geliefert habe.

In Rücksicht auf die Menge der Schriften dieser Art weiß ich seit hundert und mehr Jahren wenigstens in unserm Lande keinen, der die reine Mathematik nach allen ihren Haupttheilen vorgetragen hätte, ausser den ehemaligen Abten in Bebenhausen, Johann Jacob Hainlin, welcher im

(4

Jahr

Vorbericht

Jahr 1653 eine Synopsis mathematicam für diejenige, die in dem Würtembergischen studieren, nach der Lehrart selbiger Zeiten, und so weit man damals gekommen war, herausgegeben. Inzwischen, und seit dieser Zeit, sind zwar je und je verschiedene Rechenbücher, Geometrien, auch algebraische Abhandlungen, aber nur einzeln, und so ans Licht getreten, daß ein Leser vielerley Bücher und noch dazu von unterschiedenen Verfassern zusammen kaufen mußte, wenn er etwas ganzes in der Mathematik haben wollte. In gegenwärtigem Buche hingegen findet man alles beisammen, was zu der sogenannten reinen Mathematik, folglich zu den ersten Gründen aller mathematischen Wissenschaften, gehöret, welche sich hernach so wohl auf die Naturlehre als auch auf andere Disciplinen anwenden lassen. Das weitere von dieser Benennung

zur ersten Auflage.

nung liest man in der Einleitung.

Soll ich endlich noch etwas vom Gebrauch dieser Wissenschaft sagen, so dünkt mich, sie sehe weit geschickter unsern Verstand zu bilden, als dasjenige, was heut zu Tag den Geschmak vieler Studierenden ausmacht, und was der berühmte Herr Hofrath Kästner in einer artigen Parodie zu tadeln scheint, wenn er einem wigigen Freund in sein Stammbuch schreibt: *

○ Könnte dich ein Schatten rühren,
Der Wollust, die die Herzen spüren,
Die sich der Meßkunst zugedacht!
Du fodertest von dem Gesichte
Die leeren Stunden noch zurücke,
Die du mit Liedern zugebracht! *

X 5

In

* Man sehe Herrn Hofrath Kästners vermischte Schriften.

Vorbericht

Inzwischen muß man doch in dem Lob der Mathematik nicht zu weit gehen, und auch von dem größten Meßkünftigen eben so denken, wie der schon gerühmte Gelehrte an einem andern Ort schreibt:

Auch Newtons Alter selbst verbrachte
mit Newtons Fleiß,
Macht nur bey Sterblichen ihn zum
gelehrten Greiß!

Die Mathematik ist wirklich die schönste und zuverlässigste Wissenschaft; aber nur für die Bewunderung eines Sterblichen. Dann so schön sie auch ist, und so einen großen Vorzug sie vor allen andern auch philosophischen Tändeleien der Sterblichen hat, so ist sie doch kaum der aller-

zur ersten Auflage.

allergeringste Theil derjenigen Weisheit, welche einen für die Ewigkeit geschaffenen Geist wahrhaftig vergnügen und ergötzen kann.

Schriebs auf die
Michaelis, Messe

2 7 1 2

der Verfasser.

Wor.



V o r r e d e

zur

Zweyten Auflage.

Da meine mathematische Bücher
so glücklich gewesen, den Bey-
fall der Kenner zu erhalten, so lasse
ich es nicht nur geschehen, daß auch
von gegenwärtigen Anfangsgründen,
wie von dem mathem. Lehrbuch, eine
neue Auflage veranstaltet wird, son-
dern freue mich besonders, daß das
deutsche Publicum den Geschmack an
einer Wissenschaft, wozu Verstand,
Fleiß und Nachdenken gehöret, noch
immer unterhält. Dieses nebst dem
Bey-

Vorrede zur zweyten Auflage.
Anfall der Klugen ist die größte Ver-
bhnung, die sich ein Schriftsteller
wünschen kann, dem es darum zu-
rhum ist, dem Publico gewissenhaft
zu dienen, und nützlich zu werden.

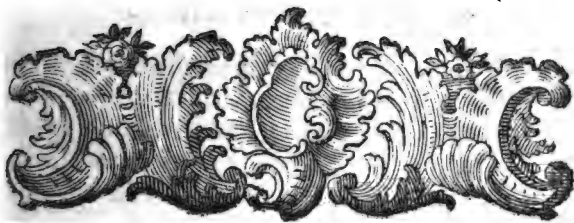
Weiter weiß ich bey dieser neuen
Ausgabe nichts hinzu zu sagen, als
daß ich mit Vorbedacht die Einrich-
tung mehrentheils ungeändert gelaß-
sen, auch nur wenige Zusätze gemacht
habe, z. E. S. 15. S. 191-193. S. 372.
S. 410. u. s. w. weil ich in der
neuen Ausgabe meines mathemati-
schen Lehrbuchs dasjenige hinlänglich
vorgetragen, was man zur jetzigen
Vollständigkeit dieser Wissenschaft ver-
langen

Vorrede zur zweyten Auflage
langen möchte. Uebrigens werden
Anfänger, wenn sie diese erste Gründe
zuerst lesen, auch nachgehends das
Lehrbuch selbst ohne weiteren münd-
lichen Unterricht lesen und verstehen
können.

Schriebs Tübingen,
den 15. Hornung
1769.

Heinr. Wilh. Clemen,
der H. Schrift Doctor und öffentl.
Professor der Theol. auf der Unis.
versität Tübingen, wie auch
Superintendens und
Pastor daselbst.

Ein



Einleitung.

§. I.

Die Mathematik kann nach dem Ursprung ihres griechischen Namens so gut die einzige Wissenschaft in der Welt heißen, als die Werke der Poeten nach gleicher Bedeutung des griechischen Worts die einzige Werke seyn sollen, die sich in die Welt schreiben und lesen lassen. Anfangs waren die Sprachen noch rauh, hart, ungekünstelt, und nur nach der Nothdurft eingerichtet, folglich an keine Regeln gebunden; Allein die Poeten gaben ihnen zuerst durch ihre Arbeiten eine Gestalt, und erhielten zur Belohnung das für den Namen, den sie jezt noch tragen, nemlich den Namen der Schriftsteller, oder der Autoren; dann ein Poet, das ist derjenige, der etwas macht, schreibt, oder heraus gibt, und ein Schriftsteller haten vor Zeiten im Griechischen einenley Bedeutung.

Ursprung des
Namen d
der Mathe
matik;

Was die Ab-
sicht gegen-
wärtiger Ab-
handlung sei:

und warum
die praktische
oder anwen-
dende Ma-
thematik
nicht auch
vorgetragen
werden.

§. 3. Dieser Absicht ist nun unsere ge-
genwärtige Abhandlung gewidmet. Ich
werde die mathematischen Wissenschaften,
doch ohne weiter auf die praktische Anwen-
dung bey den vielerley Rechnungen, dem
Feldmessen, im eigentlichen Verstand,
und den übrigen durch die Mathematik
empor gekommenen Künsten mein Aus-
gemerkel besonders zu richten, nur in so
fern zu erläutern und deutlich zu machen
suchen, daß der Verstand des Menschen
zur gründlichen Erkenntniß höherer Wiß-
schaften nach und nach zubereitet wer-
de. Die Mechanik, die Astronomie,
die Gnomonik, die bürgerliche und Milis-
tarbaukunst, die Wasserkünste sowohl in
Ansehung des stehenden als des bewegten
Wassers sind eigene und besondere Wiß-
schaften, deren jegliche ihre Kenner be-
lohnet; denn unerachtet ohne die erste
Grundsätze der Mathematik keine gründe-
lich gefaßt wird, so ist doch jedesmal eine
ohne die andere in ihrer Art etwas gan-
zes, und kann als eine besondere Wißens-
schaft erlent werden. Es gibt Mechanik-
verständige, die in ihrer Kunst voll-
kommen sind, ohne daß sie deswegen As-
tronomen zugleich seyn müßten. Eben-
so hat man vortrefliche Baumeister, die
deswegen noch keine Ingenieur sind; wie
auch die beste Ingenieur nicht allemal die
beste Baumeister bey Civilgebäuden sind.

Wir

Einleitung.

5

Wir setzen uns daher keineswegs genöthigt, die erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften mit der anwendenden Mathematik dormalen zu vermehren, da ohnehin der Zweck gegenwärtiger Arbeit vorzüglich solche Leser und Zuhörer angesthet, welche die Mathematik zu nichts anders, als zum gründlichen Denken und zu einem desto bessern Fortgang in den academischen Wissenschaften gebrauchen wollen. Nun ist es freylich nicht zu läugnen, daß auch die anwendende Mathematik zu diesem Vorhaben ungemein gute Dienste leistet. Allein ihr Umfang ist so groß, daß man bey den meisten Zuhörern befürchten müßte, die Vorbereitung würde ihnen so viele Zeit hinweg nehmen, daß sie zum Hauptzweck, um welches willen sie diese Wissenschaften lernen, zuletzt fast gar keine mehr übrig hätten. Es gibt nicht so gar viele Universitätskölpe, welche mit geringer Mühe und in kurzer Zeit diese Wissenschaften gründlich fassen, und sie hernach zu einem Mittel gebrauchen, alles andere, was nur zu lernen möglich ist, sich wie ein Leebniz deutlich und vollständig bekannt zu machen. Hierzu kommt noch, daß diejenige, welche die erste Gründe der sogenannten reinen Mathematik genau inne haben, mit leichter Mühe die Anwendung auf besondere Fälle machen, und wenn sie nur die Haupt-

§ Einleitung.

Wie diejeni-
ge, welche an-
dern Wissen-
schaften ei-
gentlich ge-
widmet sind,
die Mathe-
matik studi-
ren sollen?

erklärungen genau fassen, und sodann die Figuren und darauf gebaute Rechnungen, z. E. in der Mechanik oder andern praktischen Disciplinen ansehen, sich von selbst werden helfen können. Uebrigens aber ist es nicht nöthig, daß junge Leute, wenn sie ihr Glück nicht blos durch die Mathematik machen wollen, sich in denselben Wissenschaften allzusehr ausbreiten oder gar verstreuen, weil sonst der Geschmack an dem, wozu sie eigentlich gewidmet sind, theils verdorben wird, theils etwas annimmt, wodurch ihr Vorzug in andern Wissenschaften affectet und gezwungen werden könnte. Dies ist der Grund, warum ich meine gegenwärtige Arbeit, so kurz sie auch ist, doch in ihrer Art für vollständig und dem Hauptzweck gemäß halte.

Die Mathe-
matik als ei-
ne Wissen-
schaft der
Größen, wird
erkläret, und
nach ihren
zwei Haupt-
theilen be-
schrieben.

§. 4. Die faßlichste Erklärung von der Mathematik besteht darin, daß man sie eine Wissenschaft der Größen nennet. Die Größen lassen sich nun beides durch Zahlen und Figuren ausdrücken. Folglich wird sich die Mathematik mit Zahlen und Figuren beschäftigen müssen. Die Zahlen und ihre Verhältnisse gegeneinander kann man entweder mit allgemeinen oder mit besondern Zeichen vorstellen. Wenn ich z. E. eine Größe habe, die sechs Schuhe lang und drei Schuhe breit, und übrigens rechteckig ist, so kann ich

identweder sagen, sie sey 6 mal 3 Schuhe im Quadrat gleich, oder wenn ich die Länge a und die Breite b nenne, sie halte a mal b Quadratschuhe in sich. Die letztere Rechnung ist allgemeiner, wie man leicht siehet. Denn der Buchstabe a kann sechs, sieben, acht, neun, zehn Schuhe u. s. w. bedeuten; eben das kann man von dem Buchstaben b sagen. Folglich ist a mal b ein Ausdruck, der für unzähllich viele andere in genannten Zahlen gesetzt werden kann. Eben so läßt sich auch die GröÙe durch eine wirkliche Figur ausdrücken. Ich darf nur ein Viereck maßlen, das 6 Schuh lang und 3 Schuh breit ist, so hab ich die obige GröÙe gezeichnet. Da nun die Figuren durch die Grenzen der körperlichen Ausdehnung bestimmt werden, so wird man finden, daß die Grenzen der Körper, als Körper, Flächen, und die Grenzen der Flächen Linien, und die Grenzen der Linien Punkten seyen. Folglich handele die Mathematik nicht nur von Zahlen, sondern auch von Körpern, Flächen und Linien; und zwar eben deswegen, weil sie eine Wissenschaft der GröÙen ist.

§. 5. Eine Wissenschaft ist nicht nur. Warum sie eine bloÙe Geschichte oder Erzählung; eine Wissenschaft, daß man z. E. sagen könnte, diß ist ein Punkt, diß ist eine Linie, diß eine Fläche sey? Ob, diß eine Zahl, und diese Zahl heiÙe

24

sieben,

sieben, u. s. w. sondern sie begreift auch eine Fertigkeit in sich, dasjenige, was man sagt, zu erweisen, und die Gründe anzuführen, warum dieses oder jenes gesagt werde; oder überhaupt einen Satz oder eine Wahrheit aus unwidersprechlichen Gründen herzuleiten. Dinge, welche jedermann weiß und glaubt, erst weitläufig erweisen wollen, wäre sehr kindisch. Folglich muß derjenige, der die Kunst zu beweisen verstehen will, entweder nur diejenige Wahrheiten, die ganz unbekannt sind, oder wenigstens solche, daran man zweifelt, oder die man nicht so leicht einseheth, unumstößlich darzuthun suchen. Da nun die Mathematik eine Wissenschaft ist, so muß sie theils unbekannte, theils nicht genug erwiesene Eigenschaften der Größen erfinden und in ein gehöriges Licht setzen. Weil man aber unbekannte Wahrheiten nicht unmittelbar, sondern erst alsdann richtig finden kann, wenn man bekannte Wahrheiten, die mit den gesuchten etwas gemein haben, oder in einer nähern Verbindung mit ihnen stehen, voraus setzt und zu Grunde legt, so heißt erfinden nichts anders, als durch Hülfe bekannter Wahrheiten unbekannte entdecken, deren Verhältniß zu den bekannten gegeben wird. Z. E. ich solle zwei Zahlen finden, die zusammen fünf ausmachen, und zugleich so beschaffen sind, daß,

Was Erfinden heiße,
und wie die
Mathematik
die Erfindung
befördert?

Wiß, wenn die eine von der andern abgezogen wird, der Rest eines seye. Diese Aufgabe ist leicht; dann die Zahlen sind drey und zwey; ihre Summe ist fünf, und zwey von drey abgezogen, läßt eins übrig. Dagegen wenn man verlangt, ich solle ein Quadrat finden, das gerade noch einmal so groß seye als ein anderes gegebenes Quadrat, so ist die Aufgabe schon schwerer. Das ist die bekannte pythagorische Erfindung; Noch schwerer ist das den alten Meßkünstlern am allerschwersten gefallene delphische Problem, kraft dessen ein Eubus, das ist, ein viereckigter Körper, der gleich lang, breit und hoch ist, verdoppelt oder in einen andern verwandelt werden sollte, welcher gerade noch einmal so groß und abermal gleich lang, breit und hoch wäre. Hieraus erhellet nun, daß die Mathematik überhaupt eine Wissenschaft seye, aus bekannten Größen andere unbekannte zu erfinden, welche zu den bekannten eine gegebene Verhältniß haben.

§. 6. Die Mathematik, in so fern sie sich mit bloßen Zahlen beschäftigt, wird Arithmetik genannt; in so fern sie aber mit Figuren umgeht, heißt sie die Geometrie. Da man aber auch in der Geometrie die verschiedene Größen ohne Zahlen nicht vergleichen, oder neue Eigenschaften daraus herleiten kann, folglich die

Warum die
Arithmetik
der Geometrie
vorgezogen
werde,

und warum
die Alten so,
gleich die
Geometrie,
ohne vorher
die Arithme-
tik hinläng-
lich zu erläu-
tern, vorge-
tragen ha-
ben.

Zahlen fast unumgänglich nöthig hat, so
steht man leicht, woher es komme, daß
man die Arithmetik zuerst vortragen und
lehren müsse. Dann obschon die Alten
die Mathematik sogleich mit der Geome-
trie ohne eine eigentliche Arithmetik an-
fingen, so geschah es aus Mangel theils
der arabischen Zahlzeichen, die wir jezo
haben, theils der sogenannten Algebra
oder Buchstabenrechnung, welche sie ent-
weder gar nicht hatten, oder als ein Ge-
heimniß sorgfältig verbargen. Dahero
ware es in der Euclidischen Schule und
vor alters ungleich schwerer, die Mathe-
matik zu lernen, als es jezo ist. Man
darf nur einen Versuch wagen, und mit
dem griechischen Alphabet, nach der Be-
deutung, welche die Buchstaben als Zahl-
zeichen haben, eine Rechnung anstellen,
so wird man die Schwierigkeiten von selbst
finden. Diß ist die Ursache, warum die
griechische Mathematiker das Zählen so viel
möglich vermieden, und durch den Weg
der Reduction z. E. viel leichter gesagt
haben, alle Winkel, die aus einem Punkt
auf einer geraden Linie gezogen werden,
oder auch alle drei Winkel in einem Dreieck
seyen zweien rechten Winkeln gleich, als
daß sie gesagt hätten, sie machen 180
Grade. Da aber in unsern Zeiten aus-
schon angeführten und noch andern Grün-
den die Mathematik ungemein empor ge-
kom-

Vorzug der
neuern vor
den alten.

kommen ist, so achten wir uns verbunden, diese Wissenschaft so leicht und faßlich vorzutragen, als nur immer möglich ist. Darum werden wir die Arithmetik, und zwar sowohl nach den ordentlichen Zahlen, als auch nach der Buchstabenrechnung zuerst abhandeln.

§. 7. Eine jede GröÙe besteht aus Theilen, und diese Theile kann man als ihre Einheiten und Elemente ansehen. Je leichter und völliger sich nun eine GröÙe in ihre Elemente eintheilen läßt, je einfacher und natürlicher die Elemente selbst sind, und je genauer und zuverlässiger man sie erkennt, desto sicherer ist der Schluß, den man davon aufs Ganze macht. Da man nun von den Elementen der mathematischen Körper eine so zuverlässige Erkenntniß bekommt, so ist es kein Wunder, daß man es in der Mathematik bisher weiter als in allen andern Wissenschaften gebracht hat. So können z. E. die Dreiecke, als die einfachste und nach allen ihren Eigenschaften genugsam bekannte Figuren, für die Elemente aller geradelinierten obgleich noch so irregulären Figuren angesehen werden; daher lassen sich alle geradelinierten Figuren aufs genaueste ausmessen. Was zum Maas der krummlinigten Figuren, besonders in Absicht auf ihre Elemente dienlich seyn, werden wir bey der Differential- und Integralrechnung

Rechnung zeigen. So viel sieht man also schon, daß man es für keine unnöthige Weitläufigkeit halten dürfe, wenn man sich bei den einfachsten und simpelsten Figuren etwas länger aufhalten wird.

Von der allgemeinen mathematischen Sprache, oder vorläufige Erklärung der nöthigsten und am öftesten vorkommenden Zeichen und Charakteren.

§. 8. Aus gleichem Grunde wird es den Leser nicht befremden, wenn ich jezo auch die mathematische Sprache etwas umständlicher erkläre. Es muß doch ein Liebhaber dieser Wissenschaft vor allem Dingen eben so gut recht lesen und schreiben lernen, als derjenige, der eine fremde Sprache zu lernen anfängt. Die mathematische Sprache hat zwar ihre eigenen Zeichen; was aber ihre Grundsätze, oder, wenn ich so reden darf, ihre grammatische Hauptregeln betrifft, so sind sie allgemein, und dem Menschen so natürlich und angeboren, daß es ihm anfänglich seltsam vorkommt, wenn man ihm sagt, er solle sich diese Hauptwahrheiten besonders bekannt machen, und in seinem calculiren fleißig daran gedenken. Inzwischen wird man doch bald finden, wie nöthig es ist, daß man sie einem nicht nur sagt, sondern auch ausführlich erkläre. Da ich nun jezo von der mathematischen Sprache rede, so werde ich zuerst die Zeichen, die man wissen muß, erklären. Sie sind folgende:

= ist

- $=$ ist das Zeichen der Gleichheit ;
der Aehnlichkeit.
- $>$ dessen was kleiner ist , da die
Spitze gegen dem kleinern
gelehrt ist.
- Δ dessen was grösser ist , da die
Öeffnung gegen dem gröf-
fern gelehrt wird.
- ∞ dessen was keine Grösse hat.
 ∞ dessen was in seiner Art un-
endlich groß ist.
- $+$ der Addition ; und wird aus-
gesprochen plus.
- $-$ der Subtraction und der ar-
rithmetischen Verhältniß ;
wird ausgesprochen minus.
- \times wie auch . oder bey der Multiplication.
den Buchstaben nur
die bloße Zusamen-
setzung, $ab = a . b$
- $:$ wie auch ein Strich der Division ; und der
zwischen zwey unter geometrischen Verhält-
einander gesetzten niß.
Zahlen, $\frac{2}{3}$
- $\sqrt{}$ der Wurzeln.

Unter diesen Zeichen kommt das erste, nemlich das Zeichen der Gleichheit, am alleröstesten vor. Wir wollen aber von allen Exempel geben, weil wir doch solche Leser voraussetzen, welche die vier sogenannte Species der Arithmetik ein wenig verstehen. Z. E. wenn es heißt: $6 + 2 = 8$ so spricht man diese Schrift also aus: sechs
se

se plus zwey ist gleich achte. $4 - 1 = 3$ heißt: vier minus eins ist gleich drey. $6 \cdot 3 = 18$ oder $6 \times 3 = 18$. heißt: sechs multiplicirt mit drey ist gleich achtzehn. $ab = yx$ heißt a multiplicirt mit b ist gleich y multiplicirt mit x . Doch geberet eine solche bloße Zusammensetzung bey den gewöhnlichen Zahlzeichen nicht wie bey den Buchstaben an. Die Ursache ist leicht begreiflich. Man würde sich gar leicht verwirren. Dann $6 \cdot 3$ oder sechs multiplicirt mit drey, kann ich nicht bloss zusammen setzen, und sagen 63; weil es ins Numeriren drey und sechzig heißt. $6 : 2 = 3$ oder $\frac{6}{2} = 3$ wird ausgesprochen: sechs dividirt durch zwey ist gleich drey. $\frac{1}{\infty} = 0$. eins dividirt ins unendliche, wird nichts, oder unendlich klein. $4 > 3$ vier ist grösser als drey. $2 < 5$ zwey ist kleiner als fünf. $\sqrt{16} = 4$. die Quadratwurzel von sechszehen ist gleich vier. Wir werden an seinem Ort zeigen, daß, wenn auf dem Wurzelzeichen nichts stehe, es allemal die Quadratwurzel anzeige; in andern Fällen muß eine Zahl darüber stehen, z. E. $\sqrt[3]{8} = 2$ die Cubicwurzel aus acht ist gleich zwey. Diß ist etwas schwerer, und gehört daher nicht in die Einleitung; wie auch die Gleichung $3 - 1 = 4 - 2$ drey minus eins ist gleich vier minus zwey; wodurch ei-

we arithmetische Proportion, wie durch die folgende $6 : 3 = 8 : 4$ sechs zu drey wie achte zu vier, oder sechs dividirt durch drey ist gleich acht dividirt durch vier, eine geometrische Proportion ausgedrückt wird. Eben so werden wir auch an seinem Ort zeigen, wie man in der Geometrie die Linien, und Winkel u. s. w. lesen und aussprechen müsse.

§. 9. Die Grundregeln, nach welchen sich diejenige, die in der Mathematik was thun wollen, beständig richten müssen, werden nicht weniger faßlich seyn. Sie sind folgende:

I. Eine jede Grösse ist sich selber gleich; und eine jede Grösse ist ihren wirklichen Theilen zusammen genommen gleich. Z. E.

$$8 = 5 + 3. \quad 6 = 4 + 2 \text{ u. s. w.}$$

II. Wann zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

Z. E. $6 = 4 + 2$

$$6 = 5 + 1$$

folglich $5 + 1 = 4 + 2$.

III. Wenn man gleiches zu gleichem addirt, so kommt gleiches heraus; z. E.

$$8 = 6 + 2$$

$$4 = 4$$

$$8 + 4 = 6 + 2 + 4.$$

IV. Wenn man gleiches von gleichem substrahirt

Allgemeine Grund- und Hauptregeln, nach welchen sich die Mathematik vorzüglich richtet, und welche fast auf allen Blättern gedacht werden müssen.

trahirt, so bleibt gleiches übrig. B. E.

$$\begin{array}{r} 9 = 7 + 2 \\ 6 = 6 \\ \hline 9 - 6 = 7 + 2 - 6. \end{array}$$

V. Wenn man gleiches mit gleichem multiplicirt, so kommt gleiches heraus. B. E.

$$\begin{array}{r} 4 = 3 + 1 \\ 2 = 2 \\ \hline 4 \cdot 2 = (3 + 1) \cdot 2 \end{array}$$

VI. Wenn man gleiches mit gleichem dividirt, so kommt gleiches heraus. B. E.

$$\begin{array}{r} 8 = 6 + 2 \\ 4 = 4 \\ \hline 8 : 4 = (6 + 2) : 4. \end{array}$$

VII. Was grösser oder kleiner ist als die eine von zwei gleichen Grössen, das ist auch grösser oder kleiner als die andere. B. E.

$$\begin{array}{r} 6 = 5 + 1 \\ 2 < 6 \\ \hline 2 < 5 + 1. \end{array}$$

Dies sind beynähe die vornehmste Grundsätze, welche viel hundertmal bey dem Calculiren vorkommen, und worauf die wichtigsten Entdeckungen beruhen. B. E. bey dem 6. 5 angeführten Problem, nach welchem man zwey Zahlen finden soll, deren Summe 5, und deren Differenz 1 ist, wenn

wirden sogleich fünf von unsern Grundsätzen angewandt. Unerachtet die Aufgabe im Kopf leichter ausgerechnet ist, so wollen wir doch die Anwendung der obigen Regeln dabey zeigen, damit die Leser einen vorläufigen Begriff davon bekommen. Die zwei gesuchten Zahlen sollen x und y seyn; so wird nach Maßgab des Problems seyn

$$x + y = 5 \text{ und}$$

$$x - y = 1 \text{ folglich}$$

$$\hline 2x = 6 \text{ Can. III.}$$

$$\hline : 2 \text{ Can. VI.}$$

$$x = 3$$

und wiederum

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

$$\hline 2y = 4 \text{ Can. IV.}$$

$$\hline : 2 \text{ Can. VI.}$$

$$y = 2$$

Die zwei gesuchte Zahlen sind also 3 und 2. So leicht nun dieses Exempel an und vor sich selbst ist, so wird man doch begreifen, daß es unzähllich viel andere gibt, die man gewiß im Kopf nicht ausrechnen kann, und bey denen dahero der Nutzen von den anzuwendenden Grundsätzen ungleich größser ist.

6. 10. Endlich hat man noch auf drey Erklärungsgrundsätze zu merken, welche in den mathematischen

Hauptfäse thematischen Wissenschaften mehr als sonst
von der Aehn- sten vorkommen, wiewohl sie eigentlich
lichkeit, zur Ontologie gehören. Ich meine dem
Gleichheit Satz der vollkommenen Uebereinstims-
und Congru- mung, den Satz der Gleichheit, und
enz. den Satz der Aehnlichkeit. Zwei Sa-
 zen sind einander ähnlich, wenn man sie
 durch nichts als durch die Grösse unters-
 scheiden kann; oder wenn in beeden alles
 einerley ist, ausgenommen die Grösse.
 So kann der Sohn dem Vater vollkom-
 men ähnlich seyn, ungeachtet jener noch
 ein Kind und dieser ein Mann ist, folgs-
 lich beide an der Grösse weit unterschies-
 den sind. Ein Gemälde im Kleinen, wenn
 es kaum einen Zoll hoch ist, kann einer
 sechschußigten Person ähnlich seyn, un-
 erachtet die Grösse beederseits noch einen
 beträchtlichen Unterschied macht. Alle
 Cirkel sind deswegen einander ähnlich,
 oder ein kleiner Cirkel siehet einem größern,
 vollkommen ähnlich, wie ein kleines \circ eis-
 nem grossen ähnlich ist. Z. E. \circ \circ \circ .
 Dann wenn ich das kleinere \circ durch ein
 Vergrößerungsglas ansehe, so wird es
 dem größern vollkommen gleich werden.
 Nunmehr wird man leicht begreifen,
 daß alle diejenige Sachen einander ähns-
 lich seyen, welche durch nichts als bloß
 durch die Grösse von einander unterschies-
 den werden. Das ist der Satz des Aehn-
 lichen. Nach dem Satz der Gleichheit
 werden

haben solche Dinge mit einander verglichen, die bloß in der Grösse mit einander übereinkommen, sonst aber von einander unterschieden seyn können, wie sie immer wollen. Wann ich einen Bogen Papier in allerhand Figuren zerschneide, z. E. in Dreiecke, in Vierecke, in Fünfecke, u. s. w. und hernach sie auf eine andere Art zusammen setze: so ist, wenn nichts davon verlohren geht, die Summe aller dieser Theile, oder die daraus zusammen gesetzte neue Figur dem vorigen Bogen Papier vollkommen gleich, und nimme wieder eben so viel Platz ein, als vorhin, unersachtet eine grosse Unähnlichkeit heraus kommt. So gibt es auch Dinge, die dem Wehrt nach einander gleich sind, ob sie schon in allen andern Stücken höchst unähnlich sind. Z. E. eine Ducat ist 1/20 dem Wehrt nach fünf Gulden Silbergeld gleich, unerachtet sonst zwischen einer Ducat und fünf Gulden Münz nichts ähnliches gefunden wird. Hieraus nun erhelet zur Genüge, was eigentlich der Satz der Gleichheit seye; ein Satz, der in der Mathematik etlichen allgemeinen Nutzen hat. Endlich ist noch der Satz der völligen Uebereinstimmung oder Congruenz zu erklären übrig. Sachen oder Figuren, welche gleich und ähnlich sind, congruiren. Z. E. Zwei Ducaten von einem Schlag, zwei rechtewinklichte Vierecke

B a

von

Gleichwichtige Folgen aus diesen Sätzen.

von gleicher Länge und Höhe, sind in der Mathematik congruent oder vollkommen übereinstimmend, das ist, beedes gleich und ähnlich. Diß sind nun die vornehmste Grundsätze, die man sich bekannt machen muß, wenn man in dieser Wissenschaft sich mit Nutzen umsehen will. Die daraus gezogene Folgen sind nicht weniger fruchtbar. Wenn zum Exempel von gleichen Sachen die Rede ist, so darf man allemal gleiches für gleiches setzen oder substituiren; Ist die Rede von ähnlichen Dingen, so kann man abermal ähnliches für ähnliches setzen, u. s. w. je nachdem eine leichtere Rechnung oder sonst ein Vortheil im Calculiren daraus zu ersehen ist. Denn wie man für eine Ducat ihren Gehalt an Silbermünzen setzen darf, so darf man mit gleichem Recht z. E. für ein irregulaircs Viereck ein regulaires, das aber gleich groß ist oder gleich viel Platz einnimmt, setzen; u. s. w. Diese Substitutionen nun haben einen unbeschreiblichen Nutzen, und helfen oft die schwerste Aufgaben ungemein erleichtern, wie wir zu seiner Zeit aus der Erfahrung es lernen werden.

§. 11. Wir haben das nöthigste, und dasjenige, was wir in der Einleitung sagen wollten, ausführlich gesagt. Nun bleibt nichts übrig, als daß wir zum Werk selbst

selbst schreiten. Fleiß, Nachdenken und Was ein Aufmerksamkeit sind diejenige Eigenschaft Liebhaber der zu, die ein Liebhaber der Mathematik Mathematik zu dieser Arbeit mitbringen muß. Hat Mathematik ihm die göttliche Vorsehung noch über für Eigen- das eine vorzügliche Fähigkeit und beson- schaften ha- ders einen scharfsinnigen Witz verliehen, schaften ha- so wird er dieser Wissenschaft vor andern ben müsse, Ehre machen. Dann je grösser der Witz oder die angebohrne Fähigkeit ist, zers- verschiedene Verhältnisse, Aehnlichkeiten, und Gleichheiten einzusehen und zu entdes- len, desto weiter wird man es in der Mathematik bringen können. Ja der Fleiß selbst, den man darauf wendet, wird nach und nach die auch nicht so gar und wie viele fähige Köpfe ermunterir, und die Scharf- Wissenschaft sinnigkeit des Wizes gleichsam beleben auch mittel- und erwecken. Da nun diese Gabe des Verstandes bey allen nur möglichen Wis- mäßige Köpfe senschaften höchst vortheilhaft ist, so siehet bessern könne man aufs neue, wie und warum die Ma- thematik eine Vorberereitung zu allen hö- hern Disciplinen heissen könne. Ich ha- be daher geglaubt, meinen Lesern und Zuhörern nicht mißfällig zu werden, wenn ich nach diesem Hauptzweck die erste Gründe der Mathematik abhandle, und bey allen Gelegenheiten zeige, wie die Kräfte der Seelen dadurch geschärft wer- den. Dann unerachtet diese Arbeit nicht

neu ist, so ist sie doch auch nicht so gemein, daß man sich über die Menge der Bücher, welche die Mathematik nach unseren Absichten vortragen, einigermassen beschweren könnte.





Inhalt der Arithmetik.

§. 12.

Die Arithmetik oder Rechenkunst ist ^{Erklärung} eine Wissenschaft, aus bekannten ^{der Arithmetik} Zahlen andere unbekannte zu finden, deren Verhältniß zu den bekannten gegeben wird. Da sie sich nun mit den Zahlen beschäftigt, es mögen hernach die gewöhnliche Zahlzeichen, oder in der Buchstabenrechnung die Buchstaben seyn, so wird sie

- I. Die Zahlzeichen recht aussprechen lehren,
- II. Zeigen, was man für Veränderungen mit ihnen vornehmen könne, nemlich die Vermehrung und die Verminderung, da dann
 - 1) die Vermehrung
 - a) durch die Addition
 - b) durch die Multiplication
 - 2) die Verminderung
 - a) durch die Subtraction
 - b) durch die Division geschlehet;
- III. Von den verschiedenen Verhältnissen der Zahlen handeln, und zwar
 - 1) von den Verhältnissen zweier Zahlen, in so ferne eine theils grösser ist als die andere, theils in

24 Inhalt der Arithmetik.

so ferne eine in der andern endlichmal enthalten ist, folglich von den sogenannten Brüchen, und den auf sie angewandten vier Rechnungsarten,

2) von den Verhältnissen mehrerer Zahlen gegeneinander, das ist

a) von den Proportionen, welche in der Gleichheit zweyer Verhältnisse bestehen,

b) von der daraus fließenden Regel des tri und andern Regeln ic.

c) von den verschiedenen Progressionen.

3) Von der Verhältniß der Wurzeln gegen ihre Dignitäten oder Potenzen, und zwar

a) von den Quadratwurzeln und Zahlen,

b) von den Cubicwurzeln und Zahlen.

c) von höhern Dignitäten oder Potenzen,

d) von Irrationalgrößen; wie auch von unreinen quadratischen Gleichungen ic.

e) von der Anwendung dieser Regeln auf bestimmte und unbestimmte Aufgaben.

I. Cap.

Von dem Numeriren oder Aus-
sprechen der Zahlen.

§. 13.

Weil die Arithmetik aus bekannten Zahlen andere unbekannte erfin-
den lehrt, so ist vor allen Dingen ^{von der ar-}
nöthig, daß man wisse, wie man die Zahl, ^{arithmetischen}
len recht lesen und aussprechen solle. Wir ^{Sprache be-}
haben zwar die Hauptregeln von der ma-
thematischen Sprache in der Einleitung ^{sonders}
schon vorgetragen; allein es hat ein jeder ^{handl.}
Theil der Mathematik seine eigene Aus-
drücke und Characteres; daher allerdings
erfordert wird, daß man auch diese ins-
besondere zu verstehen sich Mühe gebe.
Was nun das Aussprechen der Zahlen
betrifft, so halten wir uns dißfalls an die
uns übliche und gewöhnliche wiewohlen
willkührliche Zahlzeichen. Sie theilen
sich in einfache und zusammengesetzte; die
einfache gehen von eins bis neune, die
zusammengesetzte fangen mit der zehenten
Zahl an, und können hernach durch zers-
chiedene Verbindungen der einfachen
Zeichen theils untereinander selbst, theils
mit den Nullen, wie wir sogleich zeigen
wollen, in das Unendliche fortgezählet
werden.

§ 5

§. 14.

Warum die
Zahlzeichen
willkürlich
seyen.

Von der
Leibnizischen
Dyadik.

§. 14. Wie die Zeichen selbst willkürlich sind, so ist auch die Zahl der einfachen Zeichen willkürlich gewesen. Dann wie man von eins bis zehn zehlet, so könnte man eben so wohl von eins bis sechse, viere, drey, oder gar nur bis zwey zehlen, und alsdann sogleich zusammengesetzte Zeichen gebrauchen. Diese letztere Art, wenn man nur bis zwey mit einfachen Zeichen zehlet, bekame von dem Herrn v. Leibniz den Namen der Dyadik. Man braucht dazu nicht weiter als ein einiges Zahlzeichen und eine Null. Das Zahlzeichen, welches die Einheit in eigentlichem Verstande ausdrückt, ist das gewöhnliche Zeichen von eins, nemlich 1. wenn man also zwey schreiben will, so muß man diejenige Verbindung von 1 und 0 gebrauchen, welche in den ordentlichen Zahlen zehen bedeutet. Z. E. wenn man einen Versuch wagen will, so wird man, weil alles auch hier auf die Stellen, wo die Zeichen stehen, anzukommen pflegt, folgende Tabelle leicht verstehen:

Dyadik. gewöhnliche Zahlen.

I	1
10	2
11	3
100	4
101	5

IIIO	6
IIII	7
IOOO	8
IOOI	9
IOIO	10
IOII	11
IIOO	12
IIOI	13
IIIO	14
IIII	15
IOOOO	16 u. f. w.

Da man nun gleich aus diesem Exempel Ihre Vor-
 greift, daß eine grosse Zahl einen un-
 gleich grössern Raum nach der Dydaktheile und ih-
 einnehmen würde, als sie nach den ge-
 wöhnlichen Zahlzeichen einnimmt, und re Schwürige-
 hernach bey starken Rechnungen durch-
 die Menge der abwechselnden Einsen und-
 Nullen eine Verwirrung entstehen könnte:
 so behält man lieber die gewöhnliche
 Rechnung bey; obschon in andern Stüs-
 len die Dydak mehr Vortheile hat, und
 man z. E. bey derselben das vielen so be-
 schwerlich fallende Einmaleins zu lernen
 gar nicht genöthiget ist. Allein diese Be-
 schwerlichkeiten lassen sich auch auf andere
 Wege vermeiden, wie wir an seim Ort
 zeigen werden. So viel merken wir in-
 zwischen noch an, daß Herr v. Leibniz Wie man
 seine Dydak zu einiger Erläuterung der
 Schöpfung aus nichts mit vielem Wißan durch die
 get

28 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

Dyadil die
Schöpfung
aus Nichts
erläutert
habe.

gewendet, und seine Gedanken auf einer Münze, worauf etliche Rechnungsproben nach der Dyadil geprägt waren, mit folgender Inschrift erläutert hat:

Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum,
oder

Alles aus nichts zu schaffen, ist schon
die Einheit genugsam.

Dann wenn ich nur Eins und Null habe, so kann ich nach der Dyadil alle nur mögliche Zahlen schreiben, sie mögen hernach noch so groß seyn, als sie immer wollen.

Warum man
mit den ein-
fachen Zahl-
zeichen nur
bis auf zehen
zähle,

§. 15. Wir bleiben aber jezo bey den gewöhnlichen Zahlzeichen stehen. Man zehlet von undenklichen Zeiten her von eins bis zehen; vermuthlich weil die Menschen anfänglich an ihren zehen Fingern das, was sie zählen wollten, hergezählt haben. Die einfache Zahlzeichen gehen von eins bis neune, und sind folgende: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sie werden einfache Zeichen genennet, weil sie als solche für sich allein, und weder unter sich noch mit andern verknüpft stehen; man heisset sie auch Einheiten, nicht zwar in Ansehung ihrer selbst, dann im eigentlichen Verstand ist nur der Eins eine Einheit, sondern in Ansehung der folgenden Zehener, Hundter u. s. w. Was also kleiner ist als ein

Zeh-

Zehner, das wird unter dem Nahmen
der Einheiten begriffen.

§. 16. Nun fragt sich aber, wie man
es denn mache, wenn man zehen schreiben
wolle? Wir haben kein einfaches Zeichen
mehr, diese Zahl auszudrücken. Folglich
muß man hier auf eine Verbindung der
Zeichen denken. Nun gibt es eine dop-
pelte Verbindung; dann entweder kann
ich sagen: Zehen ist $6 + 4$; oder ich kann
ohne ein solches Verbindungszeichen den
Wehrt der einfachen Zahlen aus den Stel-
len und Plätzen, die sie einnehmen, be-
stimmen; und dazu sind die Nullen dien-
lich, welche an und vor sich nichts bedeu-
ten; in der Verbindung aber mit den
einfachen Zahlen, den ihnen vorgesetzten
Einheiten, durch den Rang, den sie ih-
nen lassen, einen wirklich höhern Wehrt
beylegen. Folglich wenn man dem Ein-
ser eine Null nachsetzt, so wird er schon
einen höhern Wehrt bekommen. Dieser
Wehrt nun des Einsers, der die zweite
Stelle zur Linken einnimmt, ist zehenmal
so groß, als er in der ersten Stelle zur
Rechten war. Warum er gerade zehens-
mal, und in der dritten Stelle zehenmal
zehensmal, oder hundertmal größer seye,
werden wir an seinem Ort, wenn wir
von den Regeln der Combinationen han-
deln, ausführlich erweisen. Bis dahin
kann man also die Sache nur, historisch
behal-

Wie man es
mache, wenn
man eine
Zahl, die
größer als
Neune, Ze-
hen u. s. w.
ist, schreiben
solle.

Nutzen der
sogenannten
Nullen.

behalten. Der Ausdruck 10 wird demnach zehen bedeuten. Eben so wird der Zweyer in der zwenten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er in der ersten Stelle war, darum bedeutet der Ausdruck 20 so viel als zwanzig; der Neuner wird in der zwenten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er vorhin war; folglich wird 90 so viel als neunzig, 91 so viel als ein und neunzig, und 99 so viel als neun und neunzig, heißen. Hieraus ist klar, daß diese zwenfache Verbindung bis auf hundert fortgehe; wenn man aber hundert schreiben will, so muß der Einsrer abermal um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt werden, und dann bedeutet er wiederum zehenmal so viel als in der zwenten, und hundertmal so viel als in der ersten Stelle. Dieses nun zu be-
werkstelligen, brauchet man, wie man leicht einseheth, drey Zahlzeichen, weil der Einsrer die dritte Stelle zur Linken einnehmen muß; folglich wird der Ausdruck 100 hundert anzeigen; wie z. E. der folgende Ausdruck 192 hundert neunzig zwey, oder hundert und zwey und neunzig bedeutet. Diese drensache Verbindung gehet nun bis auf tausend fort; was aber über tausend hinaus ist, dazu brauchet man aus obigem Grunde schon vier Zahlzeichen oder eine vierfache Verbindung; was über zehntausend hinausgeht, er-
fort

fordert eine fünffache, was über hundert. Warum bey tausend eine sechsfache, was über tau, den Zehnern sechsmal tausend ist, eine siebenfache Verbindung u. s. w. Die Ursache davon ist zwey, bey den nicht begreiflich. Dann weil allemal Hundertern diejenige Zahl, die zehnmal so groß ist als die unmittelbar vorhergehende, eine drey, bey den Stelle weiter zur Linken erfordert, folgt Tausendern lich die Stellen selbst in die Decimalprogression fortgehen, so müssen bey zehn vier Zahlzeichen zwey, bey hundert oder zehnmal zehn zwey u. s. w. drey, bey tausend oder zehnmal hundert nöthig seyen. vier Zahlzeichen mit einander verbunden werden.

§. 17. Die Erfindung dieser Rechnung wird insgemein den Arabern zugeschrieben. Sie mag aber herkommen, Nutzen und wo sie will, so zeuget sie von einem fruchtbaren Witz. Das Witzige besteht darin: Artigkeit nen, daß die Erfinder auf den Einfall gerathen, den Wehrt der Zahlzeichen nach dieser Erklärung dem Rang oder Platz zu bestimmen, den sie neben den übrigen einnehmen und bekleiden. Wie aber nicht alles Witzige zugleich so gemeinnützig und brauchbar ist, so müssen wir auch zeigen, wie fruchtbar diese Erfindung seye. Die Bestimmung des Wehrts in den Stellen nach der zehnfachen oder Decimalprogression gibe der Rechnung eine gewisse Einformigkeit, und verhütet alle sonst zu befürchtende Verwirrungen. Hernach ist diese Art zu rech:

32 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

Ihr Vorzug
vor den ma-
thematifchen
Verbin-
dungszeichen

Warum aber
dennoch die
Mathema-
tikverständi-
ge bey ihren
gewöhnlichen
Zeichen blei-
ben.

rechnen so beschaffen, daß man mit wenig Zeichen grosse Zahlen schreiben kann; welches man durch die mathematische Verbindungszeichen nicht bewerkstelligen könnte. Denn wenn man diesen Localwerth in Fortrückung der Zahlzeichen nicht eingeführt hätte, so würde man nur die Zahl hundert zu schreiben, eine solche Menge Zahlzeichen durch das Zeichen + verbinden müssen, daß man sie kaum auf einmal überschauen könnte. Z. E. Zehen ist zwar $6 + 4$, und bald geschrieben; Z. E. aber zwanzig braucht schon mehr; Z. E. $6 + 4 + 8 + 2$. oder $9 + 9 + 2$. u. s. w. Man könnte zwar auch einen andern Weg einschlagen, und z. E. die Multiplication dazu gebrauchen: dißfalls wäre hundert $= 9. 9. + 2. 9 + 1$. Jedermann aber siehet selbst, daß diese Art zu zählen und die Zahlen zu schreiben bey weitem nicht so schicklich, bequem und artig seyn, als diejenige, die bereits eingeführt ist. Warum aber nichts destoweniger die Mathematikverständige, als welche mit solchen Rechnungen sich nicht oft abgeben, und lieber die Aufgaben in allgemeinen Formeln auflösen, bey ihrer Weise zu bleiben Ursache genug haben, werden wir an seinem Ort zeigen. Uebrigens erhellet der Nutzen dieser Erfindung in genaunten Zahlen zur Genüge. Es dünket mich daher weit ungezwungener zu seyn, wenn man

man auch im Lateinischen, statt der römischen, unsere Zahlzeichen gebraucht. Dann Die alte Römer würden gewis ihre eigene ausgemustert und die heut zu Tag übliche angenommen haben, wenn sie ihnen bekannt gewesen wären. Das einzige ist bey dieser Erfindung noch anzumerken, daß, da die Zahlzeichen zur linken Hand des Lesers einen größern Wehrt als die zur Rechten bekommen, vermuthlich die Bequemlichkeit im Schreiben diesen Rang bestimmt haben mag. Obwohl die Zahlzeichen in Ansehung ihrer selbst untereinander so geordnet sind, daß die vornehmere oder mehr bedeutende allzeit den geringern zur Rechten stehen, wie es der Augenschein leicht geben wird.

§. 18. Die Zahlen werden also von der Rechten zur Linken so geschrieben, daß das letzte Zahlzeichen zur Rechten des Lesers die Einheiten, das nächste zur Linken, die Zehner, das dritte die Hunderter, das vierte die Tausender anzeigt u. s. w. Wenn man also die Zahl 7356428 aussprechen soll; so darf man nur von hinten anfangen und sagen, es sind acht Einheiten, zweien Zehner, vier Hunderter, sechs Tausender, fünf Zehntausender, drey Hunderttausender, sieben Tausendmaltausender, oder sieben Millionen. Weil aber diese Art, die Zahlen auszusprechen, et-

E

was

34 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

Einige Mit- was weisläufig ist, so fangt man, um
tel, geschwin- sich kürzer auszudrücken, lieber von vor-
der und ferti- nen an, und sagt sieben Millionen, drey-
ser lesen zu- hundert und sechs und fünfzig tausend,
lernen. vierhundert und acht und zwanzig. Da
nun bey grossen und langen Rehen von
Zahlen die Aussprache oder das lesen et-
was schwerer fällt, und man doch die
Kürze beybehalten will, so pflegt man je
drey und drey Zahlen mit einem Strich-
lein oder andern Zeichen zu bemerken,
weil man doch drey Zahlzeichen neben ein-
ander auf einmal leicht übersehen und aus-
sprechen kann; braucht aber, um sich nicht
zu verwirren, die Vorsicht dabey, daß
man das dritte Zahlzeichen, von der rech-
ten Hand an gerechnet, mit einem Strich-
lein von unten, das sechste mit einem
Strichlein von oben, das neunte aber-
mal mit einem Strichlein von unten, das
zwölfte mit zwey Strichlein von oben,
das fünfzehende wiederum mit einem
Strichlein von unten, das achtzehende
mit drey Strichlein von oben u. s. w. be-
zeichnet; da dann nach einem Strichlein
von oben die Millionen, nach zwey
Strichlein die Billionen, nach drey
Strichlein die Trillionen u. s. w. anfangen;
nach dem untern einfachen Strich-
lein fangen jederzeit die Tausender entwe-
der der Einheiten, oder der Millionen,
oder der Billionen u. s. w. an. Z. E. die
Zahl

„
Zahl 9842, 346982, 751482, 658 wird
nach Maßgab der benzesetzten Strichlein
ausgesprochen: Neun Trillionen, acht-
hundert und zwey und vierzig tausend,
dreihundert und sechs und vierzig Billio-
nen, neunhundert und zwey und achtzig
tausend siebenhundert und ein und fünfzig
Millionen, vierhundert und zwey und
achtzig tausend, sechshundert und acht und
fünfzig.

§. 19. Wir haben bey diesem Exempel Wie man die
mit Fleiß keine Nullen angebracht, weil Nullen an
wir von dem Nutzen und Gebrauch der:
selben vorhero was sagen müssen. Es ist eben dabe,
aus §. 16. Klar, daß die Nullen, uner: und warum
achtet sie für sich selbst nichts bedeuten, in
gewissen Fällen einen wahren Nutzen ha: sie oder ander
ben, wenn sie nemlich dem Zahlzeichen ihre dergleich:
der folgenden Stelle seinen Rang und zu: den für sich
gleich seinen Wehrt geben müssen. Z. E.
man kann die Zahl zwanzig nicht ohne nichts bedeu-
Nulle schreiben; dann 2 allein ist zu we: nende Zeichen
nig; der Zweyer muß eine Stelle weiter
fortrücken; und 21 ist zuviel; folglich bey dieser
bleibe mir nichts übrig, als daß ich ent: eingeführten
weder eine Nulle oder ein anderes Zeichen, Rechnung
das weiter nichts als die Stelle und den
Rang seines Nachbars andeutet, dazu nöthig seyen.
gebrauche. Nun hätte man statt der so
genannten Nullen etwa Sternlein oder
andere Zeichen einführen und sagen können

36 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

2* soll zwanzig, und 2** soll zweihundert u. s. w. ausdrücken. Man hat aber seit langen Zeiten schon die Nullen oder Zypfras, wie sie lateinisch, oder Zero, wie sie französisch heißen, zu diesem Ende eingeführt, welche folglich die leere Stellen ausfüllen, und zugleich den zur Linken folgenden Zahlzeichen ihren Werth bestimmen. Darum schreibt man zwanzig durch den Ausdruck 20, und zweihundert durch den Ausdruck 200, u. s. w.

Wie man ein Exempel, wo viele Nullen vorkommen, fertig lesen und schreiben könne.

§. 20. Wenn man also von einem verlangte, er sollte die Zahl sechs Millionen und sechs und neunzig schreiben, so wird er am besten zurechte kommen, wenn er den Anfang zu schreiben bey den Einsheiten macht, und sagt: es sind sechs Einsheiten, neun Zehner, kein Hunderter, kein Tausender, kein Zehntausender, kein Hunderttausender, aber sechs Tausendmaltausender oder sechs Millionen da; folglich sieht die geschriebene Zahl also aus: 6000096. Eben so läßt sich auch eine geschriebene Zahl, woben Nullen vorkommen, leicht aussprechen, wenn man nur die Regel §. 18. dazu nimmt, und die Strichlein gehörig anbring. Z. E. die

Zahl 20034,000056,002 heißt zwanzig Billionen, vier und dreißig Millionen, sechs und fünfzig tausend und zwei.

§. 21. Wir haben von Millionen, Billionen, Was man
 Trillionen geredet, und noch nicht unter dem
 hinlänglich erklärt, was sie seyen. Die-
 se Rahmen erfordern also noch eine Be- Worten Mil-
 leuchtung. Was im deutschen tausend: lionen und
 maltausend ist, das nennen die Franzo- Trillionen
 sen sehr füglich eine Million, und tau-
 sendmal tausend Millionen eine Billion, verstahe. 1
 tausendmal tausend Billionen eine Trillion
 u. s. w. Folglich gehen die Millionen,
 Billionen, Trillionen u. s. w. von sechs zu
 sechs Zahlzeichen fort; das ist, nach dem
 sechsten Zahl- oder Rangzeichen, wenn es
 Nullen sind, fangen die Millionen an,
 nach dem zwölften die Billionen, nach
 dem achtzehenden die Trillionen, nach
 dem vier und zwanzigsten die Quadrillio-
 nen u. s. w. Die Deutschen haben diese Namen dieser
 Rahmen von den Franzosen um so eher Wörtern.
 angenommen, weil sie nicht nur keine ei-
 gene haben, sondern auch durch die öfte-
 re Zusammensetzung der tausendmal tau-
 sendmal tausend u. s. w. unvermeidliche
 Verwirrungen entstehen könnten. Nun
 mehr haben wir alles, was von der Aus-
 sprache der Zahlen zu wissen nöthig ist,
 umständlich beschrieben. Eines könnte
 noch hinzu gesagt werden. Es gibt Leu-
 te, welche, um einen auf die Probe zu se-
 zen, je und je gewisse Zahlen anders aus-
 sprechen, als sie ordentlicher Weise geschrie-
 ben werden, und hernach verlangen, man
 solle

38 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren.

solle sie an einem fort niederschreiben. Hieher gehört die Aufgabe, man solle Elftausend Elfhundert und Elf schreiben. Diese Zahl läßt sich nicht ohne die Addition in einem fort schriftlich ausdrücken. Man schreibt also zuerst 11000

hernach

1111

und addirt beide Zahlen $\begin{array}{r} 11000 \\ 1111 \\ \hline 12111 \end{array}$, da dann Zwölftausend Einhundert und Elf herauskommt, welche Zahl der obigen vollkommen gleich ist. Solche Exempel nun lassen sich durch das angeführte Mittel bald auflösen; wiewohlen sie in keiner andern Absicht angebracht werden, als etwa einen zu überraschen und schnell zu prüfen. Allein es sind neben dem sehr grosse Kleinigkeiten; und wenn einer auch nicht sogleich darauf antworten könnte, so darf er sich eben nicht schämen, wosern er nur das wesentliche und gründliche recht weiß, und wie die Mathematik überhaupt also auch die Arithmetik nach derjenigen

Absicht gebraucht, nach welcher sie gegenwärtig vorgetragen wird.

II. Cap.

Von der Vermehrung und Verminderung der Zahlen,
oder
von den vier Rechnungsarten, welche
sonsten die vier Species genannt
werden.

§. 22.

Eine Zahl kann man wie die Gröſſen Wie man die
überhaupt, als eine Menge von Zahlen anzu-
Theilen anſehen, welche entweder ſehen habe.
eigentlich ſogenannte Einheiten §. 15. oder
Theile der Einheit ſind. Z. E. die
Zahl zehn Gulden beſtehet aus Ein-
heiten, deren jede ein Gulden genannt
wird; die Zahl $\frac{1}{2}$ Gulden, beſtehet aus
Theilen einer Einheit, die man einen Gul-
den nennet. Folglich hat in der Arith-
metik die Einheit ſelbſt noch eine Gröſſe,
und iſt eigentlich nur eine Verhältniß,
oder wie man zu reden pflegt, keine ab-
ſolute, ſondern bloß eine reſpective Ein-
heit. Nun können alle endliche Gröſſen Ihre Ver-
vermehrt oder vermindert werden. mehrung
müſſen alſo von den Zahlen ein gleiches und Vermin-
behaupten. Eine Gröſſe aber wird ver- derung;
mehrt, wenn man entweder andere von warum eine
gleicher Art, ſie mögen hernach größer jede Zahl auf
oder kleiner ſeyn, ihr zugibt, oder wenn eine doppelte
man eben dieſelbige Gröſſe etlichmal zu Weiſe, nem-
lich durch die

addition und sich selbst sezet. Jenes heißt addiren, dieses multipliciren. Z. E. wenn ich zu 4 Gulden 2 Gulden, und wieder 6 Gulden hinzusehe, so addire ich, und bekomme eine Gröſſe von 10 Gulden; wenn ich aber 4 fl. etlichmal z. E. dreyimal zu sich selbst addire, so multiplicire ich und bekomme eine Gröſſe von 12 Gulden. Ich muß aber in beeden Fällen Gröſſen von einerley Art haben. Was nun Arten und Gattungen seyen, lernet man in der Logik. Gulden und Ducaten sind von verschiedener Art; wenn ich also 4 Speciesgulden und 3 Species Ducaten habe, so kann ich sie nicht zusammen zehlen; dann ihre Summe macht weder bloß sieben Gulden, noch auch sieben Ducaten.

Was Gröſſen von einerley Art seyen.

Wie man nach den Grundsätzen der Logik unter einerley Art oder Benennung bringen könne.

Allein ich darf nur nach den Regeln der Vernunftlehre einen andern Namen, durch die Bestimmung einer höhern Gattung, welche beeden gemein ist, z. E. den Namen Geld, erfinden, so werde ich alles addiren und sagen können: es sind sieben Stücke Gelds. Auf diese Weise bringt man verschiedene Namen unter einerley Benennung; und diß ist die allgemeine Regel, welche in der Arithmetik, vornemlich bey den Brüchen, nur auf besondere Fälle applicire wird. Man siehet hieraus, wie die Wissenschaften miteinander zusammen hangen, und wie die Arithmetik nichts anders

das als die Anwendung der Logik sehe.
Wir werden bey allen Gelegenheiten dieser
Verwandtschaft zeigen, und die Res-
geln vernünftig zu denken auch aus dieser
Wissenschaft theils zu vermehren,
theils zu erläutern suchen.

§. 23. Die Zahlen werden erstlich ^{Von der Ab-}
durch die Addition vermehrt. §. 22. dition der
Wir müssen also umständlich erklären, Zahlen.
was die Addition sehe. Addiren heißt
eine Zahl erfinden, welche verschiedenen
andern zusammen genommen gleich ist,
z. E. drey und vier giebt sieben; die
Zahl Sieben ist die erfundene Zahl, wel-
che beeden gegebenen Zahlen drey und
vier zusammen genommen gleich ist. So
leicht nun dieses Exempel ist, so giebt es
doch ungleich schwerere, wenn nemlich
nicht nur viele, sondern auch grosse Zah-
len addirt werden sollen. z. E. 234062 Wie man die
und 5348, und 90023, kann man Addition in
nicht so schnell im Kopf addiren, als die grössern Ex-
obige zwei einfache Zahlen. Folglich empeln wir
muß man hier sich einiger Vortheile be-
dienen, welche das Rechnen erleichtern, und
und in kurzer Zeit auch solche weitläuftige was man für
ge Addition beschleunigen können. Die Vortheile
se Vortheile nun bestehen darinnen, daß dabey an-
man nach den Regeln des vorhergehenden
den Capitels die Theile der grössern Zah-
len sich bekannt macht, und hernach als ne.

le gleichnamigte Theile, oder Theile, die einerley Benennung haben, nemlich Einheiten zu Einheiten, Zehner zu Zehnern, Hunderter zu Hundertern zusammen zehlt. Diß kann nun am besten geschehen, wenn man die zu addirende Zahlen unter einander schreibt, aber so, daß man von hinten, nemlich von der Classe der Einheiten zu schreiben anfangt; weil manchmalen unter den zu addirenden Zahlen einige bey den Tausendern,

Barum man andere bey den Zehntausendern, noch andere erst bey den Millionen aufhören, bey der Addition die Zahlen von der Rechten zur Linken schreiben, und auch von hinten den Anfang zu addiren machen solle.

Was Summe oder Aggregat, und summirende Zahlen seyen.

folglich ungleich lang sind, daher wenn man von vornen zu schreiben anfange, die Einheiten oft unter die Hunderter, die Zehner unter die Tausender u. s. w. zu stehen kommen würden; welches zu grossen Verwirrungen Anlaß geben könnte. Damit man endlich die herauskommende Summe von den Zahlen, welche addirt werden, sogleich unterscheiden kann, so pflegt man einen Querstrich zu ziehen, und unter selbigen erst die Summe zu schreiben. Die Summe heist die gesundene Zahl, welche den zu addirenden zusammen genommen gleich ist. Sie wird auch das Aggregat genannt. Die Zahlen aber, welche addirt werden, heissen die Summirende. Ein Exempel solle die Sache klar machen. Man solle folgende Zahlen addiren:

$$\begin{array}{r}
 236048 \\
 45329 \\
 7801 \\
 \hline
 289178
 \end{array}$$

Exempel der
Addition in
größern Zah-
len.

So machen wir erstlich den Querstrich, und zehlen die Einheiten s. 15. hernach die Zehner, ferner die Hunderter n. s. w. zusammen. Nämlich 1 und 9 Einheiten geben 10 und noch 8 dazu, geben 18 Einheiten, das sind 8 Einheiten und ein Zehner, folglich setzt man 8 Einheiten in die letzte Classe zur Rechten, und behält den Zehner für die zwente Stelle; da man dann wieder sagt 4 und 2, und ein von der ersten Classe übrig behaltener Zehner geben 7 Zehner; diese setzt man in die zwente Stelle. Nun kommen die Hunderter, nämlich acht und drey Hunderter, die zusammen eilf Hunderter, folglich einen Tausender und einen Hunderter ausmachen; daher setzt man einen Hunderter in die Stelle der Hunderter, und den Tausender behält man für die folgende Classe. Die vierte Stelle enthält die Tausender; da man nun in den summirenden Zahlen 7 und 5 und 6 Tausender ausgedruckt und noch einen Tausender von der vorigen Classe übrig hat, so wird ihre Summe 19 Tausender, das ist 9 Tausender, und einen Zehntausender geben; den Zehntausender behält man

44 Arithm. II. Cap. Von den

man für die folgende Classe, und setzt unter den Querstrich nur 9 Tausender; die fünfte Stelle ist die Stelle der Zehentausender, deren haben wir in dem vorgeschriebenen Exempel nur 3 und 4, und einen von der vorigen Classe übrig gebliebenen Zehentausender; folglich in allem 8 Zehentausender; die man unter dem Querstrich setzt; nach diesen folgen die Hunderttausender, welche an der Zahl zwey sind, und, da weder die übrige summirende Zahlen so weit gehen, noch auch von den vorigen Stellen was übrig geblieben ist, schlechterdings unter dem Querstrich zu äußerst zur linken gesetzt werden. Die ganze Summe heisset demnach zwey hundert und neun und achzig tausend, ein hundert und acht und siebenzig.

— Beweis der
Addition.

§. 24. Daß nun dieses die richtige Summe seye, läßt sich leicht beweisen. Dann wann die gefundene Zahl den gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist, so hat nach §. 23. die Sache ihre Richtigkeit. Da nun das Ganze seinen wirklichen Theilen zusammen genommen gleich ist, und wir in dem vorgegebenen Exempel alle vorgeschriebene Einheiten, alle Zehner, alle Hunderter, alle Tausender, u. s. w. aus welchen nemlich die ganze Summe besteht, zusammengezählt

zelt haben, so kann es nicht fehlen,
 die gefundene Zahl muß den obigen Zah-
 len zusammen genommen gleich seyn. Diß
 ist der Beweis von den Regeln der Ad-
 dition überhaupt. Nun ist es zwar mög-
 lich, daß, wenn man nicht geübt ist,
 leicht ein Fehler im Zusammenzählen vor-
 gehen kann; daher es rathlich ist, daß
 man bey wichtigen Exempeln die Rech-
 nung noch einmal durchgeht; welche
 Wiederholung man eine Probe nennen
 kann. Man hat zwar eine sogenannte ^{Was von der} Neuner-
 Probe, nach welcher man in den ^{sogenannten} sum-
 mirenden Zahlen und in der Summe
 gleichviel Neuner ^{Neunerpro-} wegwirft, und was
 nach den weggeworfenen Neunern übrig ^{be zu halten} bleibt,
 mit einander vergleicht; ist der ^{sehe?} Rest
 beiderseits einerley, so hat man
 nicht gefehlt; ist er aber verschieden, so
 muß ein Fehler vorgegangen seyn, folg-
 lich das Exempel noch einmal gemacht
 werden. Allein diese Probe ist so beschaf-
 fen, daß man bey derselben fast leichter
 fehlen kann, als bey der Addition selbst; ne-
 ben dem ist sie auch so weitläufig, daß man
 weniger Zeit braucht, das Exempel noch
 einmal durchzugehen, als diese Probe zu
 machen; welche ohnehin nicht einmal si-
 cher und zuverlässig ist, wenn man bey
 der Addition selbst nicht fleißig bemerkt
 hat, wie oft man neune von den für die
 folgende Stellen aufbehaltenen Zahlen
 wegs

46 Arithm. II. Cap. Von den

weggeworfen habe. Eine Probe aber, die beschwerlicher und weitläufiger ist, als die Operation selbst, die sie probiren solle, neben dem auch den Rechner gleich grosser, ja noch grösserer Gefahr zu irren aussetzet, scheint mir nicht so bequem zu seyn, als die Wiederholung der Rechnung selbst, wenn man ja glaubt, daß man gelehrt habe. Inzwischen kann man sie, weil sie doch eingeführet ist, beibehalten und sich bekannt machen; wiewohl man noch viele andere, und zwar leichtere Proben der Addition z. E. durch die erst zu erlernende Subtraction erfinden und angehen könnte, wenn es der Mühe werth wäre, das was an sich so leicht ist, mit andern gleich faßlichen und leichten Methoden ohne sonderlichen Nutzen zu vervielfältigen. Man muß Zeit und Mühe, so viel möglich ist, bei Kleinigkeiten sparen, wenn man in den Wissenschaften einen gründlichen und schnellen Fortgang bekommen will. Was übrigens die Fertigkeit betrifft, einfache Zahlzeichen zusammen zu zehlen, so übersetzt man die ganze Kunst einer fleißigen Übung. Anfänglich, bis man besser geübt ist, kann man sie an den Fingern zusammen zehlen. Dann es kommen nie auf einmal so viele Zahlzeichen vor, daß man ausser Stande wäre, sie ohne neue Hülfsmittel und Regeln addiren zu können.

Wie man
ne Fertigkeit
im Addiren
bekomme?

Wen. Die Vortheile, die man zur Fertigkeit im Denken aus dieser ersten Rechnungsart lernen kann, habe ich in meinen Principiis cogitandi Part. Pract. C. III. angemerkt.

§. 25. Es ist ohne unser Erinnern klar, daß das gegebene Exempel der Addition Zahlen von einerley Art in sich begreiffe, unerachtet wir die eigentliche Einheiten, z. E. Thaler, Gulden oder Kreuzer nicht genannt haben; darum heißt auch dieses Addiren ein Addiren in ungenannten Zahlen. Wenn man aber die Einheiten nennt, so addirt man in genannten Zahlen. Wir müssen von dieser Rechnung auch ein Exempel geben, weil es insbesondere eine statiliche Vorbereitung zur Buchstabenrechnung heißen kann. Man solle zu

Warum die bisher vorge- tragene Art zu addiren ein Addiren in ungenannten Zahlen heißt? Was die Addition in genannten Zahlen sey?

	3 fl.	5 kr.	3 Hlr.
addiren	2 fl.	58 kr.	5 Hlr.
<hr/>			
so hat man	5 fl.	63 kr.	8 Hlr.

weil aber 6 Hlr. auf einen Kr. und 60 Kr. auf einen Gulden gehen; so pflegt man schicklicher die Summe der Heller, die einen Kr. ausmachen, in die Stelle der Kreuzer, die Summe der Kr. die einen Gulden ausmachen, in die Stelle der Gulden u. s. w. zu setzen. Dahero obiges Exempel auch folgende Summe gibt,

gibt, welche der vorigen ganz gleich ist: nemlich 6 fl. 4 kr. 2 Hlr. Nur muß man wissen, wie viel Heller auf einen Kr. wie viel Kr. auf ein fl. oder in andern Ländern, wie viel Heller auf einen Groschen, wie viel Groschen auf einen Thaler u. s. w. gehen; Eben so muß man das Maas der Früchten u. s. w. inne haben. Allein bey der Buchstabenrechnung hat man dergleichen Kenntniß schon nicht nöthig; man setzet die Einheiten von gleicher Art zusammen, ohne daß man wissen müßte, wie viel *c* auf ein *b*, wie viel *b* auf ein *a* und so weiter giengen. Wir wollen die Ab- noch ein Exempel in genannten Zahlen dition in ge- geben, um den Weg zu dieser schweren nanntenZab- scheinenden aber in der That leichtem len den Weg Kunst desto besser zu bahnen. Die Zet- zur Buchsta- chen, die man wissen muß, habe ich in der benrechnung der Einleitung erklärt, dahero ich hier nichts weiter sagen will, als nur die Les- babne. ser erinnern, + heiße plus oder mehr, und — heiße minus oder weniger. Wenn aber am Anfang der Zahl gar kein Zeichen stehet, so setz man allemal im Sinn das Zeichen + oder plus hinzu. Man solle nun addiren:

$$\begin{array}{r}
 5 \text{ fl. } + \quad 6 \text{ kr. } - \quad 4 \text{ Hlr.} \\
 2 \text{ fl. } - \quad 2 \text{ kr. } - \quad 1 \text{ Hlr.} \\
 \hline
 \text{so hat man } 7 \text{ fl. } + \quad 4 \text{ kr. } - \quad 5 \text{ Hlr.}
 \end{array}$$

Dann

7 Dann daß 5 und 2 fl. zusammen 7 fl. machen, ist klar. Daß aber + 6 fr. — 1 fr. nicht mehr als + 4 fr. geben, misset daher, weil einer, der sechs Kreuzer hat und zweien Kreuzer wieder mangelt, der zweien Kreuzer davon weggeben sollte, eben deswegen nur noch vier Kreuzer übrig behält. Eben so ist endlich auch leicht zu begreifen, daß — 4 Hlr. und — 1 Hlr. zusammen — 5 Hlr. geben; dann wenn einem 4 Heller und wiederum ein Heller fehlen, so fehlen ihm zusammen fünf Heller.

§. 26. Diese Rechnung ist nun der Regeln ganze Grund von der ersten Operation oder von der Addition in der Buchstabenrechnung. Man solle z. B. addiren:

$$\begin{array}{r} 5a + 6b - 4c \\ 2a - 2b - c \\ \hline \end{array}$$

so hat man $7a + 4b - 5c$.

Exempel der Addition nach der Buchstabenrechnung.

in welchem Falle a Gulden, b Kreuzer, c Heller, oder was man sonst will, bedeuten können. Auf gleiche Weise kommt man, wenn man addirt

$$\begin{array}{r} 3a - 8b + 5c - 6d \\ 2a + 3b - 2c - 5d + 3g \\ \hline 5a - 5b + 3c - 11d + 3g \end{array}$$

D

Dann

Dann $2a$ und $3a$ geben zusammen $5a$; — $8b$ und $+ 3b$ geben — $5b$. wenn z. E. b Kreuzer bedeuten, so ist klar, daß einer, der 3 Kreuzer hat und 8 dar von weggeben solle, zu Bezahlung seiner Schuld noch 5 Kreuzer zu wenig hat. u. s. w. Die letzte $3g$ haben keinen gleichen Nahmen in der obern Classe, folglich werden sie eben in der Summe besonders gesetzt. Man siehet auch in dieser Rechnung, daß es gleich viel ist, ob man von vornen oder von hinten zu addiren anbenrechnung. fangt, weil es hier nicht auf die Stelle der Buchstaben ankommt, oder weil die Stellen der Buchstaben keinen weiteren Werth bestimmen. Nur muß man immer gleiche Buchstaben zusammen setzen, sie mögen hernach stehen, wo sie wollen. Die Addition der Buchstaben ist also wirklich viel leichter als die gewöhnliche Addition in genannten Zahlen §. 23. und die ganze Kunst bestehet darinnen, daß man die Zeichen $+$ und $-$ wohl bemerke, und in der unten gezogenen Summe dasjenige, was gegen einander aufzuheben ist, wie wir gezeigt haben, richtig aufhebe.

Warum man §. 27. Die andere Art, die Zahlen zu nicht so vermehren, heißt die Multiplication §. 22. gleich nach folglich sollten wir nach der Ordnung jetzt der Addition davon handeln. Weil aber in allen mathematischen Schriften die Subtraction von der Mul- gleich

gleich nach der Addition abgehandelt wird, ^{tiplikation,} und die sogenannte zweyte Species ist, so ^{als der zwey-} ^{ten Art, die} sehen wir uns, um keine Neuerungen zu ^{Zahlen zu} ^{vermehrten} ^{handelt?} haben, nunmehr genöthiget, die Re- ^{geln} der Subtraction zu erklären, wenn wir vorher gezeigt haben, wie die Zahlen vermindert werden. Eine Zahl kann wie die Zahl kleiner werden, wenn man entweder viele ^{len} ^{kleiner} und verschiedene andere Zahlen von einer Art nach und nach von ihr wegnimmt, oder ^{oder ver-} ^{mindert wer-} wenn man nur eine einige Zahl so oft als ^{den?} möglich ist, von ihr abziehet; oder überhaupt, man kann eine Zahl vermindern, wann man eine andere von ihr hinwegnimmt, ohne darauf zu sehen, um wie vielmal sie kleiner worden seye, als sie vorher war; ich sage um wie vielmal und nicht um wie viel. Man kann sie aber auch vermindern, wenn man sich bemühet, sie genau so vielmal kleiner zu machen, als man verlangt, z. E. zweymal, oder drey mal, oder sechsmal kleiner, als sie vorher war. Jenes heißt subtrahiren, dieses dividiren. Wir reden aber bey diesen Vermehrungs- und Verminderungsarten von ganzen Zahlen; dann in gebrochenen Zahlen pflegt die Multiplication zu vermindern und die Division zu vermehren, wie wir zu seiner Zeit erweisen werden.

§. 23. Subtrahiren heißt also nichts ^{Erklärung} ^{der Subtra-} ^{ction.} anders, als eine gegebene Zahl um eine

andere gleichfalls gegebene Zahl kleiner machen, oder von einer gegebenen Zahl eine andere hinwegnehmen, damit man wisse, was nach geschehener Operation übrig bleibe. Z. E. ich solle von sechs abziehen viere, so bleiben zwey übrig. Herr v. Wolf erklärt deswegen die Subtraction durch die Erfindung einer Zahl, welche mit der abzuziehenden Zahl zusammen genommen der zu verminderten Zahl gleich ist. Dann wie $6 - 4 = 2$, so ist auch $2 + 4 = 6$. Und das ist die sogenannte Probe der Subtraction. Wir wollen aber unsere obige Erklärung beibehalten, und diß einige noch melden, daß die Zahl, von welcher eine andere abgezogen wird, die zu vermindernde Zahl, (numerus minuendus) diejenige, welche abgezogen wird, die abzuziehende Zahl, (numerus subtrahendus) und die gefundene, welche nach geschehener Operation übrig bleibt, der Rest oder die Differenz, (Residuum vel differentia) genannt wird. Dieser letztere Name hat seinen guten Grund. Denn der Rest zeigt an, um wie viel die eine von den gegebenen Zahlen größer oder kleiner seye als die andere; z. E. $6 - 4 = 2$; also ist 6 um 2 größer als 4 und 4 um 2 kleiner als 6; folglich 2 der Unterscheid oder die Differenz zwischen 6 und 4. Man muß sich das Wort Differenz vorzüglich bekun-

Warum der Rest auch die Differenz oder der Unterschied genannt werde.

ma

machen, weil es bey den arithmetischen, Verhältnissen und Progressionen wieder zum Vorkommt, und zum Verstand derselben vieles be trägt.

§. 29. Nunmehr haben wir zu zeigen Regeln der wie die Regeln der Subtraction in unge- Subtra-
nannten grössern Zahlen mit Vortheil an-
gewandt werden können. Die Sache, ction,
hat an sich selbst keine Schwierigkeiten.
Dann weil eine jede Zahl aus Einheiten,
Zehnern, Hundertern, Tausendern be-
steht, so ist klar, daß man die Einheiten
von Einheiten, Zehner von Zehnern, Hun-
darter von Hundertern u. s. w. nach und
nach abziehen, folglich abermal, wie
bey der Addition von hinten anfangen,
auch alle Verwirrung zu vermeiden, die
gegebene Zahlen von der gesuchten Differ-
renz durch einen Querstrich absondern
müsse. Z. E. man solle von 2486
abziehen 1254

so ist der Rest 1232,
dann er enthält die Differenz aller Eins-
heiten, Hunderter, Tausender u. s. w.
4 Einheiten von 6 Einheiten lassen übrig
2 Einheiten; 5 Zehner von 8 Zehner las-
sen übrig 3 Zehner; 2 Hunderter von 4
Hunderter lassen übrig 2 Hunderter,
1 Tausender von 2 Tausendern läßt übrig
1 Tausender. Die gefundene Zahl ist al: Beweis der
so die Summe aller übriggebliebenen Ein: Subtrac-
D 3 heit: ons-Regeln.

heiten, Zehner, Hunderter und Tausender; folglich die wahre Differenz zwischen den zwei gegebenen Zahlen. Und das ist der Beweis der Subtraction. Neben diesem Beweis hat man auch eine leichte Probe der Subtraction, die sich auf die Wolffsche Erklärung und auf die Natur der ganzen Operation §. 28. gründet.

Probe der Subtraction; und warum auf diese Probe mehr als auf die gewöhnliche Probe der Addition gehalten werde. Wenn man nemlich die gefundene Zahl zur gegebenen kleineren Zahl addirt, so muß die grössere wieder heraus kommen, diese Probe ist natürlich und leichter als die Wiederholung der Operation selbst, weil das Addiren leichter ist als das Subtrahiren, und man die Probe zu machen, nur zwei Mengen von Zahlen addiren darf. Diejenige Schwierigkeiten, die wir §. 24. berührt haben, fallen also hier gänzlich hinweg. In unserm vorgegebenen Exempel wird demnach die grössere Zahl wieder heraus kommen, wenn man die gefundene Differenz zu derjenigen Zahl, die man abgezogen hatte, addiret.

$$\begin{array}{r}
 \text{Minuendus} \quad 2486 \\
 \text{Subtrahend.} \quad 1254 \\
 \hline
 \text{Different.} \quad 1232 \\
 \hline
 \text{Minuendus} \quad 2486
 \end{array}$$

So oft nun dieses geschieht, so oft hat man ein sichres Kennzeichen, daß man recht gerechnet habe; wenn man anders in der Probe selbst nicht fehlet.

§. 30. Das gegebene Exempel ist von zwei schweren
 in leichtesten Art. Es sind aber noch ^{re Gattungen}
 90 Gattungen der Subtraction übrig, ^{der Subtra-}
 welche etwas schwerer scheinen. Die ei- ^{tion werden}
 ne ist, wenn man eine grössere Zahl von ^{angezeigt;}
 einer Kleinern abziehen sollte, die andere,
 wenn in der zu vermindernenden Zahl Null-
 len vorkommen. In beiden Fällen muß
 man von den unmittelbar vorhergehenden
 Stellen etwas entlehnen, damit eine ge-
 gebene Zahl entweder von einer Kleinern,
 oder von einer Stelle der Nullen wirklich
 abgezogen werden könne. Da nun in ^{wie man es}
 der unter uns üblichen Zahlenordnung ei- ^{machen müs-}
 ne jede Stelle zehnmal grösser oder klei- ^{se, wenn man}
 ner ist, als die unmittelbar daneben ste- ^{in ungenann-}
 hende; so wird eine jede für die unmittel- ^{ten Zahlen}
 bar niedern Stelle entlehnte Einheit ^{das grössere}
 zehnmal so groß seyn, als die Einheit der ^{von dem klei-}
 jenigen Stelle, in welche sie entlehnt ^{nen abzie-}
 wird; folglich wenn ich aus der Zehners ^{ben solle;}
 Stelle eine Einheit für die eigentlich soge-
 nannte Einheiten entlehne, so werde ich
 zehn Einheiten bekommen, entlehne ich ^{und was das}
 aus der Stelle der Hunderter eine Ein- ^{Entlehnen}
 heit oder einen Hunderter für die Stelle ^{seyt.}
 der Zehner, so bekomme ich zehn Zeh-
 ner u. s. w. Hieraus siehet man, daß,
 wenn man die Zahlzeichen, von welchen
 eine Einheit in ihrer Art, z. E. ein Zeh-
 ner, ein Hunderter, ein Tausender ent-
 lehnt worden ist, mit einem Punkt bes-

zeichnet auch solche Exempel, wo man das Größere hie und da vom Kleinern abziehet, sich nach den allgemeinen Regeln der Subtraction behandeln lassen. 3. E.

Exempel und

Beweis vom

Entleihen.

$$\begin{array}{r} 3425 \\ 918 \\ \hline 2507 \end{array}$$

Dann 8 Einheiten kann ich von fünf Einheiten nicht abziehen, folglich entlehne ich eine Einheit aus der Stelle der Zehner: eine Einheit aber aus der Stelle der Zehner ist ein Zehner, oder zehn Einheiten von der ersten Classe gleich; folglich habe ich zusammen fünfzehn Einheiten, von welchen ich acht wohl abziehen kann; ich schreibe also unter den Querstrich sieben, weil $15 - 8 = 7$. Hernach subtrahire ich einen Zehner von dem obigen Zehner, welcher wegen dem Punkt durch die geschehene Entlehnung um eins verringert, und da er vorher ein zweifacher Zehner war, izo nur noch ein einfacher ist. Der Rest davon ist also Nullte, welche ich in die Stelle der Zehner unter dem Querstrich setze. Ferner sollte ich neun Hunderter von vier Hundertern subtrahiren, weil nun dieses nicht geschehen kann, so entlehnte ich aus der folgenden Stelle der Tausender eine Einheit, welche zehn Hundertern gleich ist; ich werde auf diese Weise

Weise vierzehnen Hunderter bekommen, zu welchen sich neun Hunderter füglich anheben lassen, indeme der Rest noch fünf enthält. Weil ich endlich von den dreien Tausendern eine Einheit entlehnt, so bleiben nur noch zweien übrig, welche gleichfalls unter den Querstrich zur Differenz in die Stelle der Tausender gesetzt werden.

§. 31. Sollen aber in der zu vermin- Was man zu
dernden Zahl Nullen vorkommen, so thun habe,
verfährt man abermal auf gleiche Weise, wenn man
nur mit dem Unterschied, daß die Null- wenn man
len, von welchen man ohnehin nichts ent- wirkliche
leihen kann, nach geschעהer Entleh- Größen von
nung von dem nächsten Zahlzeichen, im Nullen abzie-
Stane zu Neunern gemacht werden muß- sen sollen, oben
sen. Die Ursache davon ist leicht zu be- ben sollte, oben
greiffen. Denn wenn ich z. E. von 20, wenn in der
eins wegnehme, so bleibt 19; also wird, wenn in der
weil ich nur eins wegnehme, die letzte Null- zu vermin-
le zum Neuner, und der zehnfache Zeh- dernden Zahl
ner, von dem ich einen entleihen mußte, Nullen vor-
zu einem einfachen Zehner. Wiederum, kommen.
wann ich von 200 eins hinweg nehme, so
bleibt 199; und die beide Nullen werden
Neuner; nehme ich von 200 zweien hinc-
weg, so bleibt 198; und die letzte Null-
welche um einen Zehner vermehrt worden,
folglich gleich ist $+10$, wird achte übrig
lassen, die nächste Null- aber in einen
Neuner verwandelt. Wiederum, wenn
D 5 ich

Warum die ich 2 von 2000 abziehe, so bleiben übrig
 Nullen nach 1998; hier werden abermal alle zwischen
 geschebener der letzten Null und dem nächsten Zahl-
 Entlehnung zeichen stehende Nullen in Neuner ver-
 zu Neunern wandelt. Auf gleiche Weise läßt sich nur
 werden. begreifen, daß auch in grossen Exempeln,
 die man nicht im Kopfe rechnen kann, die-
 se Veränderung statt haben müsse. Der
 Beweis davon ist nicht schwer. Dann
 wie $10 = 9 + 1$, und $100 = 9 \text{ Zehnern}$
 $+ 9 \text{ Einheiten} + 1$, so sind auch 1000
 $= 9 \text{ Hundertern} + 9 \text{ Zehnern}, + 9 \text{ Ein-}$
 Beweis und heiten $+ 1$. Wenn demnach nur eine
 Exempel da, Einheit der letzten Classe subtrahirt werden
 von. solle, so ist die Differenz $= 9 \text{ Hundertern},$
 $+ 9 \text{ Zehnern} + 9 \text{ Einheiten. u. s. w.}$
 Nun werden die Exempel von dieser Satz-
 ung leicht zu machen seyn. Man solle

$$\begin{array}{r}
 \text{von} \quad 48'0'0'0'0'28 \\
 \text{subtrahiren} \quad 25030046 \\
 \hline
 \text{so ist der Rest} \quad 22969982
 \end{array}$$

Dann 6 von 8 läßt 2, 4 von 2 kann man
 nicht abziehen, folglich entlehnt man vom
 dem nächsten Zahlzeichen, 8, welches
 schon in der Stelle der Millionen steht,
 eine Einheit der Millionen, wodurch ru-
 werts alle dazwischen ligende Nullen in
 Neuner und der Zweyer in $2 + 10$ oder in
 12 verwandelt wird; Nun sage ich 4 von
 12 läßt 8; ferner 0 von 9 läßt 9; 0 von
 9 läßt 9, 3 von 9 läßt 6, 0 von 9 läßt 9,
 5 von

5 von 7 läßt 2, und 2 von 4 läßt 2. Um mehrerer Gewisheit willen darf man nur die §. 29. vorgeschriebene Probe nachmachen.

§. 32. Wie man mit genannten Zahl: Von der
len addirt, so kann man auch genannte Subtraction
Zahlen von einander subtrahiren. 3. E. in genannten
man solle von 6 fl. 40 kr. Zahlen.
subtrahiren 4 fl. 25 kr.
so ist der Rest: 2 fl. 15 kr.

Dieses Exempel ist klar und faßlich genug. Wenn man aber das kleinere vom größern subtrahiren solle, so scheint die Sache mehr Schwierigkeit zu haben. Allein man kann eine solche Aufgabe nach zwei Methoden auflösen. Dann entweder muß ich eben wissen, wie viel Kreuzer auf einen Gulden gehen, und wo es nöthig ist, für einen Gulden Kreuzer entlehnen u. s. w. oder ich darf nur, wenn ich das größere vom Kleinern abziehen sollte, die Operation umkehren, und das kleinere vom größern subtrahiren, den Rest aber hernach negativ oder mit dem Zeichen minus bemerken und setzen. 3. E. weil sechzig Kreuzer auf einen Gulden gehen, so werde ich durch Hülfe des Entlehne, folgende Aufgabe leicht berechnen können. Man solle nemlich

Wie man die Sache anzu- greifen habe, wenn man in genannten Zahlen das Größere vom Kleinern abziehen sollte?

Erste Methode.

60 Arithm. II. Cap. Von den

von 18 fl. 36 fr.
abziehen 12 fl. 40 fr.
so hat man 5 fl. 56 fr.

Zweite und
leichtere
Methode.

Dann wenn ich zu 36 fr. noch für einen Gulden Kreuzer entlehne, so habe ich 60 + 36 fr. das ist 96 fr. von diesen lassen sich 40 fr. abziehen, und bleiben übrig 56 fr. die Gulden aber werden eben desswegen um einen vermindert; dahero man hernach die 12 fl. nicht von 18 sondern nur von 17 fl. abziehen darf. Allein die andere Art, die ich sogleich anführen werde, ist kürzer und bequemer, dann wenn ich das obige Exempel noch einmal setze,

18 fl. 36 fr.
12 fl. 40 fr.
so ist der Rest 6 fl. minus 4 fr.

Beweis und
Nutzen dieser
Methode.

denn ich darf nur 36 von 40 subtrahiren, und sagen, der Rest 4 ist negativ: dann 6 fl. weniger 4 fr. ist eben so viel als 5 fl. + 56 fr. Diese Art zu subtrahiren hat nicht nur in verschiedenen weitläufigen Exempeln, wie ich bey der Berechnung des julianischen Periodus in meinem Examine temporum gezeigt habe, ihre grosse Vortheile, sondern sie bahnet uns auch den Weg zur Subtraction in der Buchstabenrechnung; welche wir jetzt vollends erklären wollen.

§ 33. Man gibt in der Buchstabenrechnung verschiedene Regeln vom Subtrahiren, deren aber diejenige leicht entzifferet seyn können, welche den Grund davon einsehen und verstehen. Man kann plus von plus, minus von minus, plus von minus, minus von plus, grössers von Kleinern, und Kleineres von grössern subtrahiren. Alle diese Fälle kommen hier vor; sie sind aber gar nicht schwer, wenn man nur in dem Nachdenken sich ein wenig üben mag. Es ist natürlich, daß, wenn ich

$$\begin{array}{r} \text{von} \quad 4a + 3b + c \\ \text{subtrahire} \quad 3a + b + c \\ \hline \text{der Rest} \quad a + 2b \end{array} \text{ heisset:}$$

plus von
plus, und
war das

Kleinere vom
Grössern
subtrahirt.

das ist der erste und leichteste Fall; dann c von c geht auf, ein b von 3b läßt 2b, und 3a von 4a läßt ein a. Wenn man ferner bey einerley Zeichen das grössere vom Kleinern abziehet, so lehrt man, wie ich §. 33. gezeigt habe, die Operation an, und zieht das Kleinere vom grössern ab, setzt aber dem Rest das entgegen stehende Zeichen vor. Z. E.

$$\begin{array}{r} 5a + 2b + 3c \\ 2a + 6b + 4c \\ \hline \text{läßt übrig} \quad 3a - 4b - c \end{array}$$

Zweiter Fall, wenn man plus von plus, aber zugleich das Grössere vom dem Kleinern subtrahirt.

dann 2c von 5a lassen 3a; 6b von 2b

läßt

Exempel und
Beweis da-
von.

kann ich nicht abziehen; ich lehre es aber um; und ziehe $2b$ von $6b$ ab, und bemerke den Rest $4b$ mit dem Zeichen — oder minus. Dann wenn z. E. der Buchstabe b Kreuzer, und der Buchstabe a Gulden bedeuten sollte, so wird ja (5 fl. + 2 kr.) — (3 fl. + 6) = 3 fl. — 4 kr. oder 2 fl. weniger 4 kr. Oder überhaupt, wenn einer zweien Kreuzer hat, und solle sechs davon bezahlen, so werden ihm nothwendiger Weise noch vier dazu fehlen, und das zeigt man im Rest an, wie viel ihm zu Bezahlung dieser Schuld noch fehle. Eben so macht mans, wenn man von $3c$ subtrahiren solle $4c$; da dann ein c noch fehlet. Das wird unten im Rest angezeigt. Vielleicht drückt man sich auf diese Weise faßlicher aus, als wenn man sagt, minus $4b$ bleiben übrig. Dann die Redensart übrig bleiben, oder das lateinische Residuum zeigt etwas positiv an. Und das ist eben die Ursache, warum sich so manche darüber aufhalten, wenn sie hören, daß sich die Mathematik mit weniger als nichts beschäftige. Allein der Scheinwiderspruch hängt blos von dem Schall und Klange eines Wortes oder einer Redensart ab, die man nicht hinlänglich versteht. In der höhern Geometrie sind viele negative Größen wirkliche Größen, und sie heißen negativ, weil sie der positiven Größe in einer

Woher es
komme, daß
manchen das
mathematis-
sche weniger
als nichts so
fremde und
ungereimt
scheine?

Vorläufige
und kurze
Erläuterung
dieses Aus-
drucks.

da entgegen gesetzten Richtung liegen. Eben so muß man auch die negative Zahl in der Arithmetik aus dem rechten Gesichtspunkt beurtheilen, wenn man davon urtheilen will; wie wir an diesem Ort, so oft es Gelegenheit gibt, zeigen werden. Uebrigens kann man sich von dem weniger als nichts, einigermaßen einen Begriff durch die Vorstellung eines Menschen machen, der mehr Schulden hat, als er zu bezahlen im Stande ist. Wiewohl es wenige Fälle gibt, in welchen dieses Gleichniß die verneinende Größen in der Mathematik hinlänglich erläutern könnte. Anfänger aber können sich damit eine Zeitlang helfen, und alle schwerscheinende Exempel dadurch erklären.

§. 34. In der Buchstabenrechnung ^{andere aber} gibt es bey dem Subtrahiren noch mehr ^{nicht so oft} Fälle, ^{vorkommen-} ausser den beiden, die wir ange- ^{de Fälle der} führt haben. Sie kommen aber nicht ^{Subtra-} so oft und häufig vor. Wer sich die ^{ction.} beide §. 33. erklärte Exempel recht bekannt macht, der wird in manchen Rechnungen fortkommen können, wenn er auch die übrige Fälle nicht wissen sollte: doch wollen wir sie auch noch erklären. Man kann minus von minus, plus von minus, und minus von plus subtrahiren. Wir handeln zuerst vom letzten Falle. Wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl.

1 fl. weniger 6 fr. so bleibet nothwendiger Weise 2 fl. + 6 fr. übrig; dann indem ich den ganzen Gulden abgezogen, so habe ich zugleich 6 fr. zu viel abgezogen, folglich muß ich sie im Rest wieder addiren. Demnach gibt minus von plus im Rest plus. Wenn ich also von $3a$ subtrahire $a - 6b$ so bleiben übrig $2a + 6b$; oder in förmlichen Exempeln:

$$\begin{array}{r} 4a + 3b \\ 2a - 5b \\ \hline 2a + 8b \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \text{ fl.} + 3 \text{ fr.} \\ 2 \text{ fl.} - 5 \text{ fr.} \\ \hline 2 \text{ fl.} + 8 \text{ fr.} \end{array}$$

wenn ich also minus von plus abziehe, so darf ich nur die Zahlen addiren, und die Summe im Rest mit dem Zeichen plus bemerken. Der zwente Fall ist, wenn man plus von minus subtrahiren muß. Ich habe 3 fl. weniger 6 fr. das von sollen subtrahirt werden 2 fl. plus 3 fr. so werden mir im Rest bleiben 1 fl. weniger 9 fr. In diesem Fall darf ich also nur wiederum die Zahlen addiren, ihre Summe aber mit dem Zeichen minus bemerken. Z. E.

Vierter Fall,
wenn plus
von minus
subtrahirt
wird.

$$\begin{array}{r} 3a - 6b \\ 2a + 3b \\ \hline a - 9b \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \text{ fl.} - 6 \text{ fr.} \\ 2 \text{ fl.} + 3 \text{ fr.} \\ \hline 1 \text{ fl.} - 9 \text{ fr.} \end{array}$$

Es ist noch ein Fall übrig, da man minus von minus subtrahiret. Diß geschieht

Ich setze auf eine doppelte Weise; ich soll von 2 fl. weniger 10 kr. subtrahiren 1 fl. weniger 4 kr. so werde ich im Rest haben 1 fl. weniger 6 kr. dann weil ich die 4 kr. nicht subtrahiren darf, so wird der obige Mangel von 10 kr. um 4 geringer, folglich nur noch 6 kr. seyn. Hingegen wenn ich von 2 fl. weniger 10 kr. subtrahire 1 fl. weniger 12 kr. so habe ich im Rest 1 fl. plus 2 kr. Die Ursache ist leicht zu begreifen; der obige Mangel von 10 kr. wird nicht nur aufgehoben, sondern in eine Grösse verwandelt, welche dem Ueberschuss der untern Zahl gleich ist. Folglich geht es hier wie bei der ersten Operation, wenn man plus von plus subtrahirt; §. 33. die abziehende Zahl mag hernach grösser oder kleiner seyn. Z. E.

$$\begin{array}{r} 2a - 10b \\ a - 4b \\ \hline a - 6b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a - 10b \\ a - 12b \\ \hline a + 2b \end{array}$$

von kleinern
subtrahirt
werden.

Dann wenn ich neben dem abgezogenen a die $4b$ im ersten, oder die $12b$ im andern Fall auch noch abziehe, so würde ich wirklich zu viel abziehen, weil ich nicht das ganze a sondern das um 4 oder 12b verminderte a abziehen darf. Demnach muß ich diese 4 oder 12b wieder addiren, dann gerade um so viel b würde ich sonst zu viel subtrahiren. Das sind nun
E alle

Exempel, alle Fälle die bey dem subtrahiren vorkommen, und in folgendem Exempel enthalten sind:

$$\begin{array}{r}
 4a + 3b - 5c + 8d - 7e - 2f \\
 3a + 8b + 4c - 8d - 3e - 6f + g - 2h \\
 \hline
 a - 5b - 9c + 16d - 4e + 4f - g + 2h
 \end{array}$$

Erläuterung
des gegebenen
Exem-
pels.

Ein einiger Fall scheint übrig zu seyn; der sich aber von selbst verstehen läßt. Ich habe in dem zu subtrahirenden Rechten die Buchstaben $+g - 2h$ gesetzt, welche sich in dem zu vermindernenden Rechten auf keine ähnliche Buchstaben beziehen, und dennoch subtrahirt worden sind. Allein wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl. + 3 fr. so habe ich auch in der zu vermindernenden Zahl keine Kreuzer, und doch sage ich: es bleiben mir im Rest 2 fl. weniger 3 fr. Eben so bleiben mir 2 fl. + 3 fr. übrig, wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl. weniger 3 fr. das Exempel ist so deutlich, daß ich nicht nöthig habe, zur Erläuterung noch etwas hinzu zu setzen. Eines aber muß ich zum Beschluß vornemlich anmerken, und meine Leser bitten, sich dasselbige bekannt zu machen. Wer das obige Exempel nur obenhin ansiehet, wird finden, daß der Rest eben so ausfallen würde, wie er ausgefallen ist, wenn man die Zeichen der zu subtrahirenden Zahl verändert, das ist, allemal aus plus in

Eine allgemeine, kurze und höchst nützliche Regel für alle Fälle der

AUS

und aus minus plus gemacht, und
 hernach beide Reihen addirt hätte. Aus
 dieser Anmerkung läßt sich eine einige all-
 gemeine kurze und faßliche Regel für alle
 mögliche Fälle der Subtraction in
 Buchstaben, abstrahiren, welche folgen-
 der massen ausgedrückt wird: verändere
 alle Zeichen der abzuziehenden Zahl
 und addire nach geschehener Verän-
 derung. Oder verwandle bey der ab-
 zuziehenden Zahl die Zeichen plus in
 minus und minus in plus, hernach
 addire beide Zahlen. Diese Regel ist
 ungleich besser, als diejenige, welche für
 alle einzelne Fälle besonders eingerichtet
 sind, und weil sie schwer zu lernen sind,
 auch nicht gleich oft vorkommen, das
 Gedächtnis nicht nur beschweren, sondern
 auch bald wieder vergessen werden.

§. 35. Multipliciren heißt eine Zahl
 etlichmal zu sich selbst addiren; die Multi-
 plication in ganzen Zahlen ist also wirk-
 lich eine Art die Zahlen zu vermehren.

Diejenige Zahl welche etlichmal zu sich
 selbst addirt wird, heißt die zu multiplici-
 rende Zahl; die andere Zahl, welche an-
 zeigt, wie oft die erste zu sich selbst addirt
 worden, ist der Multiplicator; beide zu-
 sammen heißen die Factores oder die Effi-
 cientes. Die nach geschehener Operation
 erfundene oder heraustrommende Zahl nen-
 net man das Factum oder das Product.

E

3. E.

3. E. ich solle sechs mit drey multipliciren, so sind 6 und 3 die Factores; 3 mal 6 oder 18 aber ist das Product oder Sactum. Die Multiplication selbst geschiehet wirklich durch eine schnelle Addition; und zwar im vorgeschriebenen Fall, durch eine dreymalige Addition des Erchfers zu sich selbst: dann wenn ich 6 dreymal zu sich selbst addire, wie im bengeetzten Exempel,

6

6

6

so ist die Summe: 18

Wie und
warum man
in der Mul-
tiplication
die gewöhn-
liche Addi-
tion bloß in
eine schnelle
re Addition
verwandelt.

Diese Summe heisset nun in der Multiplication ein Product. Weil aber eine solche Operation zu weitausläufig würde, wenn ich grosse Zahlen z. E. 324 mit 256 multipliciren oder zweyhundert und sechs und fünfzig mal zu sich selbst addiren sollte, so hat man auf Mittel gedacht, die gewöhnliche aber dabei langsame Addition in eine schnellere, kürzere und weniger Platz einnehmende Addition zu verwandeln. Und das geschiehet durch Hülfse des einmal Eins oder der pythagorischen Rechentafel, welche man auswendig lernen, oder, so oft man multiplicirt, beständig vor Augen haben muß. Diese Rechentafel ist nichts anders als eine wirkliche Addition aller möglichen einfachen Zahlen, so oft sie sich nach ihren Eins-
heis

heiten zu sich selbst addiren lassen. 3. E. Warum das
 was ist die Summe, wann 9 zu sich selbst
 9 mal, oder 8 mal, oder 7 mal, oder 6 mal u. s. w. addirt wird. Ueber die Zeh-
 ner, Hunderter Tausender u. s. w. darf die Rechen-
 tafel nicht hinausgehen. Dann von zehen bis hundert kommen alle einfa-
 che Zahlen wieder vor; so auch von hundert bis tausend u. s. w. Man hat also
 genug, wenn man diese schnelle Addition von 1 bis 9 auswendig kann; weil die
 weitere Stellen durch die Decimalprogression von selbst nach dem ersten Capitel
 bestimmt werden; nur muß man Achtung geben, ob man mit eigentlichen Einheiten,
 oder mit Zehnern, oder mit Hundertern u. s. w. multiplicire; in welchem Fall die
 Zahlzeichen so viel Nullen hinter sich bekommen, um so viel Stellen sie ihrem
 Wehrt und Rang nach vorgerückt werden. Doch darf man die Nullen nicht
 ausdrucken, wenn man nur die Stelle oder den Rang im Anfang gleich genau beobachtet. Endlich siehet man leicht,
 daß die Erfindung dieser schnellen Addition sich auf die gewöhnliche und bey uns eingeführte arabische
 Zahlzeichen gründe; folglich bey andern Zeichen nicht statt habe,
 wenigstens wenn sie statt finden sollte, vorher nach der Menge der Zeichen
 verändert werden müßte. So darf man E. bey der Leibnizianischen Dyadik das
 3. warum es bey der Leibnizianischen

Obst und Einmal eins nicht wissen, und kann doch
 den der bloß alles multipliciren, wenn man nur dupli-
 fen Buchsta- ren kann. Auf gleiche Weise brauche
 benrechnung man zur Multiplication der Buchstaben
 nicht statt als Buchstaben gar kein Einmal eins,
 Ande? wie wir an seinem Ort zeigen werden.

Hingegen zur gewöhnlichen Multiplicac-
 tion unserer eingeführten Zahlzeichen muß
 man das Einmal eins wissen. Und es ist
 eine bloße Trägheit wenn man es nicht
 lernen mag. Ich kan daher die allzu
 grosse Herablassung dererjenigen nicht billi-
 gen, welche den Arithmetischen Müßige
 Ob man der gängern zu gefallen allerhand Methoden
 ren zu lieb, erfunden haben, deren sie sich bedienen
 könnten, wenn sie zu träge sind, das Eins
 die das Ein, mal eins zu lernen. Alle diese Manieren
 mal eins aber sind ungleich weitaufziger, als die
 nicht lernen gewöhnliche, welche durch Hülfe des py-
 thagorischen Rechentafeleins sich ausrechnen
 lassen, leicht, nen läßt. Man wird daher um so we-
 niger von mir fordern, daß ich eine dar-
 zere Hülfe, von nahmhaft machen solle, weil derjenige
 mittel zu ge, der das leichte und kurze Einmal eins
 multipliciren gelernt hat, drey Exempel gerechnet ha-
 ben wird, ehe der andere, der die Regel
 erfinden solle der Säulen vorziehet, nur die Zurüstung
 und könne zur Berechnung eines einigen Exempels
 gemacht hat.

§. 36. Ich habe die pythagorische Re-
 chentafel oder das Einmal eins öfters
 schon genennet, auch gezeigt, worinnen
 die

die Vortheile desselben bestehen: doch wird Was das vor
 die Sache deutlicher werden, wenn ich tabagrische.
 die Tafel, oder vielmehr das Tafelein selbst Rechentafel
 setze. Man macht ein Quadrat, und ein jedes
 theilet es nach der Breite und Länge in
 gleichviel kleinere Quadrätlein, nemlich
 auf jeder Seite in neun Quadrätlein ein;
 schreibt sodann die einfache Zahlen von
 1 bis 9 nach der Quere und Länge in
 die erstere Quadrätlein; hernach addirt
 man eine jede einfache Zahl nach der Ord-
 nung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mal zu sich
 selbst, und schreibt die Aggregata in die
 folgende Quadrätlein. Z. E.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In diesem Tafelein werden alle einfache Erklärungs
 Zahlen nach der Ordnung neunmal zu und Ge-
 sich selbst addirt. Z. E. wenn ich 6 nach brauch des
 der Quere oder Länge suche, so finde ich selbst.

in den folgenden Quadrätlein die Summe von 6, zweymal, oder 3 mal, oder 4 mal, oder 5 mal u. s. w. zu sich selbst addiret. Will ich nun die Producte wissen, so darf ich nur die eine Zahl nach dem ersten Querstrich oder nach der Breite und die andere nach der Länge, aber im ersten Reihen der Quadrätlein, auffuchen, und die auf beide Zahlzeichen in geraden Linien sich beziehende Zahl suchen, welche das Product seyn wird. Z. E. wie viel ist 7 mal 4? Sieben suche ich nach der Länge, 4 nach der Breite; Alsdann schaue ich von 4 in die gerade Linie herunter bis die Querlinie von 7 die obige Verticallinien durchschneidet. Das daselbst befindliche Quadrätlein enthält das Product 28, oder das Aggregat von 7 viermal zu sich selbst addirt; ebenso würde ich dieses Product finden, wenn ich 7 nach der Breite und 4 nach der Länge suchen wollte. Diese Rechentafel hat vor dem sonst gewöhnlichen massen vorgeschriebenen Einmal eins den Vorzug, daß man sogleich hinter sich und für sich, wie man sagt, multipliciren oder z. E. wissen kann, wie viel nicht nur 7 mal 9, sondern auch 9 mal 7 seye. Doch wollen wir jezo das gewöhnliche Einmal Eins zum lernen auch noch hersehen:

Wie man das
Einmal eins
ausprechen
und lernen
sollte?

vier Rechnungsarten.

73

1	mal	1	ist	1
2	mal	2	ist	4
3	mal	3	ist	6
4	mal	4	ist	8
5	mal	5	ist	10
6	mal	6	ist	12
7	mal	7	ist	14
8	mal	8	ist	16
9	mal	9	ist	18
10	mal	10	ist	20.

5	mal	5	ist	25
5	mal	6	ist	30
5	mal	7	ist	35
5	mal	8	ist	40
5	mal	9	ist	45
5	mal	10	ist	50.

6	mal	6	ist	36
6	mal	7	ist	42
6	mal	8	ist	48
6	mal	9	ist	54
6	mal	10	ist	60.

3	mal	3	ist	9
3	mal	4	ist	12
3	mal	5	ist	15
3	mal	6	ist	18
3	mal	7	ist	21
3	mal	8	ist	24
3	mal	9	ist	27
3	mal	10	ist	30.

7	mal	7	ist	49
7	mal	8	ist	56
7	mal	9	ist	63
7	mal	10	ist	70.

8	mal	8	ist	64
8	mal	9	ist	72
8	mal	10	ist	80.

9	mal	9	ist	81
9	mal	10	ist	90.

4	mal	4	ist	16
4	mal	5	ist	20
4	mal	6	ist	24
4	mal	7	ist	28
4	mal	8	ist	32
4	mal	9	ist	36
4	mal	10	ist	40.

10	mal	10	ist	100
10	mal	100	ist	1000
10	mal	1000	ist	10000
10	mal	10000	ist	100000
10	mal	100000	ist	1000000
oder Million.				

Wie man
durch Hülfe
des Einmal
eins wirklich
multipliciret

§. 37. Nun wird es gar keine sonderliche Kunst seyn, alle nur mögliche auch noch so grosse Zahlen zu multipliciren. **B.** E. ich solle 3648 mit 436 multipliciren, das ist 6 mal, hernach 30 mal, und endlich noch 400 mal zu sich selbst addiren: folglich setze ich den Multiplicator unter die zu multiplicirende Zahl, so, daß die Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner und so weiter zu stehen kommen, hernach mache ich einen Strich und multiplicire nach dem Einmal eins zuerst alles mit den Einheiten, ferner mit den Zehnern, endlich mit den Hundertern, und addire zuletzt die gefundenen einzelne Producte zusammen.

$$\begin{array}{r}
 3648 \\
 436 \\
 \hline
 21888 \\
 10944 \\
 14592 \\
 \hline
 1590528
 \end{array}$$

Dann ich sage 6 mal 8 ist 48; setze also 2 Einheiten und behalte die 4 Zehner für die folgende Stelle; ferner 6 mal 4 ist 24, und 4 Zehner, die ich behalten, dazu, geben 28, das sind 8 Zehner die ich setze, und 2 Hunderter die ich für die folgende Stelle der Hunderter aufhebe; weiters 6 mal 6 ist 36 und die 2 übrig behaltene Huns

Hunderter dazu, machen 38 u. s. w. Wenn ich alles mit den Einheiten durch multiplicirt habe, so multiplicire ich auch mit den Zehnern, und sage: 3 mal 8 oder 30 mal 8, denn es sind, wie ihre Stelle anzeigt, 3 Zehner, geben 24 Zehner, oder 240 Einheiten; folglich muß ich entweder unter den ersten achter in die Stellen der Einheiten eine Null setzen, oder darf ich dieselbe auch ganz leer lassen, wenn ich nur den vierer unter die folgende Classe setze, weil er Zehner anzeigt, folglich unmöglich unter die Einheiten gesetzt werden kann. Aus gleichem Grunde muß ich, wenn ich mit Hundertern multiplicire, das erste gefundene Zahlenzeichen unter die Stelle der Hunderter setzen u. s. w. Daß endlich die partial Producte hernach besonders addirt werden müssen, ist vorhin klar; dann ich verlange nicht bloß die verschiedene partial Producte, sondern dasjenige Product zu wissen, das allen zusammen genommen gleich ist. Da ich nun durch diese Rechnung die Summe der Producte aller Einheiten, aller Zehner, aller Hunderter u. s. w. in die zu multiplicirende Zahl bekomme, so sieht man leicht, daß nach der vorgeschriebenen Methode alle mögliche Zahlen multiplicirt werden können. Und das ist der Beweis von der Multiplication.

Warum man, wenn mit mehrern Zahlen multiplicirt wird, das eine partial Product als einmal um eine Stelle vor sich rücken muß.

Warum die partial Producte besonders wieder addirt werden?

Beweis von der Multiplication in ungenannten Zahlen.

§. 38. Bey der Multiplication kommen keine besondere Fälle wegen den Nullen vor. Dann wie die Nullen, als welche blos die Plätze ausfüllen, und den Rang der Zahlzeichen bestimmen helfen, in der Addition nichts vermehren, so vermehren sie auch nichts in der Multiplikation; man sagt daher ganz recht, Null mal Nullen ist Nullen, zweymal Nullen ist Nullen u. s. w. Weil sie aber nichts desto weniger den Rang der Zahlzeichen wirklich nach der Decimalprogression vergrößern, so darf man sie auch hier nicht gänzlich aus der Acht lassen. Wann ich z. E. 423 mit 100 multiplicire, so sehe ich:

$$\begin{array}{r}
 423 \\
 100 \\
 \hline
 000 \\
 000 \\
 423 \\
 \hline
 42300
 \end{array}$$

Erster Fall, und sage, weil keine Zahlzeichen in der wenn am Ende, Stelle der Einheiten sich befinden, Null mal 3 ist Null, 0 mal 2 ist 0, 0 mal 4 ist 0; ferner, weil keine Zahlzeichen in Nullen ange, der Stelle der Zehner stehen, abermal Null mal 3 ist Null, 0 mal 2 ist 0, 0 mal 4 ist 0; fange aber unter der Stelle bängt sind, der Zehner an §. 37. endlich weil ein sie mögen der Hunderter da ist, so fange ich zuletzt in der hernach dem Stelle der Hunderter zu schreiben an und sage

Sage 1 mal 3 ist 3, 1 mal 2 ist 2, 1 mal 4 ist 4; die partial Producte addire ich zusammen, und bekomme die Zahl 42300. Aus diesem Exempel ist klar, daß man einer Zahl, die mit 10, 100, 1000. u. s. w. multiplicirt wird, nur so viel Nullen anhängen darf, als der Multiplikator Nullen enthält. Wenn ich also 34 mit 1000 multiplicire, so ist das Product 34000. Sollte ich aber 34 mit 2000 multipliciren, so multiplicire ich nur mit 2 und hänge dem Product die 3 Nullen noch an, z. E. 8000 ist das Product von 4. 2000. Eben so geht es wenn ich 2000 mit 34 multiplicire; indeme ich abermal nur den Zweyer mit 34 multipliciren und hernach dem Product die 3 Nullen anhängen darf. Sollten aber mitten in der Zahl Nullen seyn, so verfahre ich nach der allgemeinen Regel, oder wenn die Nullen im Multiplikator stehen, so rücke ich nur das erste Zahlzeichen nach der Null um zwei Stellen u. s. w. zumal fort: Z. E.

$$\begin{array}{r}
 3004 \\
 23 \\
 \hline
 9012 \\
 6008 \\
 \hline
 69092
 \end{array}$$

Zweiter Fall, wenn in der Mitte Nullen stehen; und zwar erstlich in der zu multiplicirenden Zahl.

3 mal 4 ist 12, das sind 2 Einheiten und ein Zehner für die folgende Stelle; ferner 3 mal 0 ist 0, und ein Zehner von dem

dem vorhergehenden Product, gibt in die Stelle der Zehner, weiters 3 mal 0 ist 0, welche ich in die Stelle der Hunderter setze u. s. w. Stehen aber die Nullen im Multi-

tiplicator, so rücke ich das Product um 2, 3, oder mehr Stellen, je nachdem es viel oder wenig Nullen sind, zumahl fort. Z. E.

34086

2006

wenn der

Multiplika-

304516

tor zwischen.

68172

den ersten

68376516

und letzten

Zahlzeichen

Nullen hat.

Dann 6 mal 6 ist 36, das ist, 6 Einheiten und 3 Zehner für die folgende Stelle; 6 mal 8 ist 48 und 3 Zehner, die übrig behalten sind, dazu, geben 51, das ist, ein Zehner und 5 Hunderter; den Zehner setze ich und die 5 Hunderter kommen in die folgende Stelle; 6 mal 0 ist 0, und 5 Hunderter dazu, geben 5 Hunderter, die in die Stelle der Hunderter kommen u. s. w. Hernach sollte ich mit Zehnern alles durch multipliciren; weil aber der Multiplikator in der Stelle der Zehner eine Nulle hat, so rücke ich in die Stelle der Hunderter mein nächstes Zahlzeichen fort; weil aber der Multiplikator auch in dieser Stelle eine Nulle hat, so wird das nächste Zahlzeichen in die Stelle der Tausender geschrieben; dann ich multiplicire hernach mit 2 Tausendern; und sage 2 mal

6 sind

Beweis und

Probe von

den bey den

Nullen gege-

6 sind 12 Tausender; folglich muß derjenige ^{der} immer in die Stelle der Tausender zu ^{gehn.} stehen kommen. Sollte einer die Sache noch nicht begreifen, so darf er nur nach der allgemeinen Regel multipliciren, in welchem Fall er leicht finden wird, daß er sich ohne Noth doppelte und dreifache Mühe mache, wenn er die gegebene Regel nicht befolget. **Z. E.**

$$\begin{array}{r}
 34086 \\
 2006 \\
 \hline
 204516 \\
 000000 \\
 000000 \\
 68172 \\
 \hline
 68376516
 \end{array}$$

Hier kommt das obige Product wieder heraus; und der Unterschied bestehet nur darinnen, daß sich der Rechner unnöthige Mühe mit den Nullen machen und bey dem zweyten und dritten Partialproduct sagen mußte: 0 mal 6 ist 0, 0 mal 8 ist 0, 0 mal 0 ist 0, 0 mal 4 ist 0, u. s. w.

§. 39. Aus dem bisherigen erhellet, Einige sagen, daß man mit Nullen und mit eins multipl. meine Sage multipliciren könne. Was aber mit Nullen werden aus multiplicirt wird, das wird zu Nullen. den bisher: Viermal Nullen ist Nullen, und viermal ein gefol: Nichts ist Nichts, heißt also gleich viel. **gert.** So leicht diese Anmerkung ist, so nöthig will es seyn, daß man sie mit Fleiß be- **hals**

Eine wirkliche Grösse durch Nullen multiplicirt wird Nulle.

Nutzen dieses Satzes.

Eine wirkliche Grösse durch Eins multiplicirt wird nicht vermehrt noch vermindert; oder Einmal Eins ist Eins:

Nutzen dieses Satzes;

Wie und warum die gemeinste Wahrheiten die fruchtbarsten seyen; und warum man die Klein-

halte, und wisse, daß eine wirkliche Grösse mit Nichts oder mit Nullen multiplicirt zu Nichts werde. In der Differentialrechnung werde ich den Nutzen davon zeigen, und beweisen, was für wichtige Fehler durch Beobachtung dieser Kleinigkeiten vermieden werden können. Alle Welt weiß es, daß einer, wenn er viermal nichts hat, so viel habe, als wenn er einmal nichts oder überhaupt nichts habe. Und doch ist dieser so gemeine und bekannte Satz eben so wichtig, als fruchtbar der folgende Grundsatz ist, daß Einmal eins eins seye, oder daß eine Zahl durch eins multiplicirt weder vermehrt noch vermindert werde, sondern sich selbst vollkommen gleich bleibe. Z. E. einmal sechs ist gleich sechsen; oder $1 \cdot 6 = 6$. und $1 \cdot 3 = 3$. u. s. w. Den Nutzen von diesem so gemeinen und jedermann verständlichen Satz wollen wir gleich im nächsten Capitel bey den Verhältnissen und Brüchen zeigen; indeme sich die meiste Demonstrationen der daselbst vorzutragenden fruchtbaren Lehre von den Verhältnissen blos darauf gründen, und dadurch faßlich gemacht werden können. Man sieht hieraus, daß die gemeinste Wahrheiten die fruchtbarsten seyen, und daß man ja nichts als eine Kleinigkeit ansehen oder verachten solle, man habe dann zuvor bewiesen, daß es eine wirkliche Kleinigkeit seye,

sey, und weder im gemeinen Leben noch in dem Reich der Wissenschaften irgend eine nützliche Folge haben könne.

§. 40. Wenn wir die Art zu multipliciren noch einmal betrachten, so finden wir, daß das Product die eine von den gegebenen Zahlen so oft in sich enthalte, als die andere von den gegebenen Zahlen Einheiten in sich begreift. In kleinen Exempeln erhellet dieses ganz deutlich. Dann wenn ich 3 mit 2 multiplicire, so kommt 6 heraus. Dieses Product 6 enthält den einen Factor 3 so oft als der andere Factor 2 eins in sich begreift. Dann 3 ist in 6 zweymal, und eines ist in 2 auch zweymal enthalten. Wenn wir also schon dividiren könnten, so dürften wir nur das Product mit einem von den gegebenen Factoren dividiren, so würde der Quotient der andere Factor seyn, wofür wir in der Rechnung nicht gefehlt hätten; und das wäre die Probe der Multiplication. Weil wir aber die Regeln der Division noch nicht vorgetragen haben, so müssen wir diese Probe noch so lange aufschieben, bis wir deutlich wissen, was dividiren seye. Inzwischen hat Hr. Baron von Wolf die obige Eigenschaft des Products in Rücksicht auf seine Factores zur Definition der Multiplication gemacht. Da aber die Nominaldefinitionen willkürlich sind, weil eine je-

niakelsten
nicht verach-
ten solle?

Worinnen

die Probe

der Multi-

plication be-

stehe?

und warum

man sie noch

nicht vortra-

gen könne?

Auf was man

bey den will-

phälogischen Er-
klärung in
einem Vor-
trag haupt-
sächlich zu se-
hen habe.

de Eigenschaft, die der Sache allein zu-
kommt, für eine Erklärung derselben an-
gesehen werden kann, auch ein jedes Ding
verschiedene Eigenschaften von solcher
Gattung haben kann, so darf man alle-
mal diejenige wählen, die einem zu sei-
nem Zweck am dienlichsten, für die Leser
und Zuhörer aber am faßlichsten und so
beschaffen zu seyn scheint, daß alles übris-
ge, was von der Sache gesagt werden
solle, auf eine ungezwungene und leichte
Art daraus hergeleitet werden kann.

Von der
Multiplicaa-
tion in ge-
nannten
Zahlen.

§. 41. Die Multiplication kann auch
wie die Addition und Subtraction in ge-
nannten Zahlen geschehen. Weil sich
aber Gulden mit Kreuzern, u. s. w. wenn
man die Gulden nicht vorher zu Kreuzern
gemacht hat, nicht wohl multipliciren lassen,
so siehet man schon, daß man in diesem Fall
alles unter einerley Benennung bringen
müsse. Wiewohl wir an seinem Ort,
besonders in der Geometrie, zeigen wer-
den, daß man dieser Reduction durch ei-
nige andere Vortheile könne überhoben
werden, und z. E. 3 Schuhe 4 Zoll mit
5 Schuhen 6 Zoll multipliciren dürfe, oh-
ne daß man nöthig hätte, die Schuhe in
Zolle zu verwandeln. Dergleichen Re-
geln der Fertigkeit werden wir nur bei
solchen Fällen melden, welche von selbst
eine Gelegenheit dazu geben, weil es ei-
gentlich unsre Absicht nicht ist, das pra-
ctische

etliche in der Arithmetik und Geometrie besonders abzuhandeln. Uebrigens ist das Multipliciren in genannten Zahlen nicht schwer. Wenn man 2 fl. 6 kr. mit 4 kr. multipliciren solle, so macht man die Gulden zu Kreuzern; und addiret die noch dazu gehörige Kreuzer, die Summe wird hernach auf die gewöhnliche Weise multiplicirt. Z. E. 2 fl. machen 120 kr. und 6 kr. dazu, geben 126. Diese multiplicire ich mit 4. Das Product gibt 904 kr. welche ich hernach durch die Division mit 60 wiederum in Gulden verwandele, und was übrig bleibt, in die Classe der Kreuzer besonder setze.

§. 42. Es ist noch übrig, daß wir auch die Multiplication in der Buchstabenrechnung zeigen. Buchstaben werden miteinander ohne das Einmal eins, durch blosses zusammensetzen multiplicirt. Wenn ich a mit b multipliciren solle, so setze ich a und b zusammen, und sage, das Product ist ab . Eben so ist von a in b und c das Product abc oder bac , oder bca u. s. w. Dann es gilt gleichviel, wo die Buchstaben stehen, und welcher von ihnen der erste oder der letzte seyn soll. Man könnte auch bey den Zahlzeichen diese Weise zu multipliciren einführen, nur mit dem Unterscheid, daß die Factores durch Punkte, als die Zeichen der Multiplication, miteinander müssen verbunden werden,

Wie man in der Buchstabenrechnung multipliciret?
 gleichgültig, welche Buchstaben in der Multiplication zuerst stehen.

84 Arithm. II. Cap. Von den

weil sie sonst, wenn sie bloß zusammen
gesetzt würden, eine andere Bedeutung
hätten. Z. E. 6 solle mit 5 multiplicirt
werden. Wenn einer nicht wirklich mul-
tipliciren mag oder kann, so darf er nur
setzen 6. 5, oder 5. 6, oder 6×5 . Das
Product von 32 in 245 ist 32. 245, und
wenn man es noch einmal mit 15 multi-
pliciren sollte, so heißt es 32. 245. 15.
Dieser Methode bedient man sich in ma-
thematischen Schriften nicht selten, bes-
onders wenn man nur die Formeln an-
zeigt, wie etwas berechnet werden solle.
Da man dann die wirkliche Arbeit den
gemeinen Rechenmeistern vollends übers-
läßt.

§. 43. So leicht nun die erste Haupt-
regel in der Buchstabentrechnung ist, so
gibt es doch auch besondere Fälle, welche
man in der Ausübung beobachten muß.
Dann es können erstlich Zahlen bey den
Buchstaben stehen, hernach gibt es die
schon benannte Fälle, da man nicht im-
mer plus mit plus, sondern auch plus mit
minus, und minus mit minus multipli-
cirt. Wenn die Buchstaben Zahlzeichen
vor sich haben, so multiplicirt man gemein-
lich die Zahlzeichen nach der gewöhnli-
chen Regel, und setzt sodann das Buch-
staben-Product selbst ihnen unmittelbar
nach. Z. E. $3a$ multiplicirt mit $4b$ gibt
 $12ab$, $5x$ multiplicirt mit $2ab$ gibt $10abx$.
u. s. w.

Wie man multiplicire, wenn die Buchstaben Zahlzeichen vor sich ha-
ben.

u. s. w. sind aber die die Zahlen groß, daß man sie nicht sogleich im Kopf ausrechnen kann, so verbindet man sie durch das Multiplicationszeichen. Z. E. $204x$ multiplicirt mit $5ab$ gibt im Product ($54. 204$) abx . Diese Fälle sind leicht, es gibt aber noch schwerere, welche jezo folgen.

§. 44. Wenn man plus mit plus multiplicirt, so begreift man aus dem bisherigen leicht, daß das Product auch plus plus mit minus oder positiv seyn muß. Multiplicirt man aber plus mit minus und minus mit minus, so muß man die Regeln für das Zeichen des Products erst suchen. Wir wollen zuerst sehen, was heraus komme, wenn man plus mit minus, oder welches gleich viel ist, minus mit plus multiplicire, es seye gegeben $a - b$, das solle mit c multiplicirt werden. Das a und das c hat kein Zeichen, folglich ist a und c plus. Dann eine jede Gröſſe die zu Anfang steht, und kein Zeichen vor sich hat, ist eben deswegen positiv. Dieß gehört zwar noch zur mathematischen Sprache; doch findet es auch hier seinen rechten Platz. Die Mathematiker haben diese Regel unter sich festgestellt, daß sie einer positiven Gröſſe zu Anfang einer Reihe von Gröſſen kein Zeichen vorsezen wollen; vermuthlich deswegen, damit die Zeichen nicht gar zu oft vorkommen und allzuviel Platz einnehmen. Wenn also der erste

Wie man plus mit minus multiplicirt? Warum eine jede Gröſſe zu Anfang gesetzt, wenn sie kein Zeichen vor sich hat, plus seye.

Buchstabe in einer Rechnung kein Zeichen
 hat, so ist er allemal positiv, und man
 darf im Sinne das Zeichen plus hinzu-
 # Was heraus denken. Um nun wieder auf das Exem-
 plume wenn pel $a - b$ multiplicirt mit c zu kommen, so
 sehen wir sogleich, daß man das a nicht
 man plus mit ganz, sondern nur das um ein b vermindert
 minus mul- derte a mit c multipliciren solle. Wenn
 tiplicire? wir also a mit c multipliciren, und das
 Product ac setzen, so haben wir es um c
 zuviel multiplicirt; folglich begreift man
 schon, daß man von diesem Product et-
 was abziehen müsse; und zwar weil ich b
 auch mit c multipliciren solle, gerade das
 Product bc . Dieses wird also negativ
 werden. Wenn also plus mit minus
 Beweis, daß multiplicirt wird, so bekommt das Pro-
 duct das Zeichen minus oder wird nega-
 minus mit tiv. Das Product von $a - b$ in c ist al-
 plus minus so $ac - bc$. Sollte jemand daran zweifeln,
 gebe so darf er nur die Probe mit Zahlen ma-
 chen, und z. E. für a setzen einen Sechser,
 für b einen Zweyer, und für c einen Dreher
 so wird er haben $6 - 2$ multiplicirt mit 3 .
 Das ist nach unserer Regel $6 \cdot 3 - 2 \cdot 3$
 $= 18 - 6 = 12$, welcher Ausdruck ganz
 richtig ist und mit der gemeinen Art zu
 multipliciren übereinkommt. Dann 6
 weniger 2 ist 4 , und 4 mit 3 multiplicirt
 gibt 12 .

§. 45. Wir wollen aber von dieser
 Regel noch einen Beweis geben, welcher
 uns

uns zugleich zeigen wird, was minus mit **Was heraus**
 minus multiplicirt für ein Product habe. **komme, wenn**
 Wir müssen wir unsern Lesern vorläufig **man minus**
 noch sagen, wie ein regulaires Viereck **mit minus**
 ausgemessen werde, weil sich der Beweis **multipliret**
 auf diese geometrische Aufgabe gründet. In
 der ersten Tafel der geometrischen Figuren,
 fig. I. stehet ein regulaires Viereck. Man
 mißt seine Fläche, wenn man die Höhe AB
 oder Ae mit der Breite AD oder Ai mul-
 tiplicirt. Nun wollen wir die Höhe Ae **Exempel und**
 des größern Vierecks aus dem Buchsta- **Beweis, daß**
 ben a und seine Breite Ai mit dem Buch- **minus mit**
 staben c bezeichnen. In diesem Viereck **minus plus**
 stehen oben und auf der Seite noch zwei **gebe.**
 kleinere Vierecke; das eine heißt Begh,
 dann so liest und spricht man nach dem an
 den vier Ecken geschriebenen Buchstaben
 ein Viereck aus. Seine Höhe ist Be, wel-
 che wir b nennen wollen, und die Breite
 ist Bh = Ai; also die vorige, die c heißt.
 Folglich wird das Maas dieses kleinern
 Vierecks bc seyn. An der Seite stehet
 noch eines, welches DiCh heißt, und zur
 Breite Di hat; welche wir mit dem Buch-
 staben d ausdrücken; die Höhe ist die vo-
 rige, weil ig gleich Ae ist, folglich wie-
 derum a. Dieses Viereck wird also, wenn
 man nemlich die Höhe mit der Breite
 multiplicirt, zu seinem Maasse ad haben.
 Endlich bleibt noch ein Viereck übrig,
 welches ABCD heißt, und von den bee-
 den

den kleinern Vierecken gleichsam eingefasset ist. Dieses wollen wir nun ausmessen. Die Höhe AB ist $Ae - eB = a - b$, die Länge ist $Ai - Di = c - d$. Folglich wird sein Inhalt seyn $(a - b) \cdot (c - d)$. Nun wollen wir wirklich multipliciren; weil wir schon wissen, was heraus kommen muß, folglich uns im multipliciren helfen und lernen können, was minus mit minus gebe. Es seye also

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline ac - cb - ad + bd \end{array}$$

weil alle Buchstaben in einander multiplicirt werden, so findet sich in der Multiplication selbst keine Schwürigkeit, §. 42. aber die Zeichen wissen wir noch nicht alle recht zu setzen. ac muß plus haben, dann plus mit plus gibt plus. cb und ad müssen minus haben, dann plus mit minus gibt minus. §. 44. Was aber bd haben müsse, lernen wir aus der Figur. bd ist das kleine Viereck *Chgf*. Wenn ich nun von dem grossen ac , oder, *Aegi*, abziehe cb und ad , oder *Begh* und *Digf*, so ziehe ich wirklich, und zwar gerade das kleine Viereck *Chgf* oder bd zu viel ab; demnach muß ich es wiederum addiren, oder mit dem Zeichen plus bemerken. Folglich weiß ich jezo schon, was bd für ein

Zei

Zeichen haben müßte, und das Exempel wird also heißen:

$$ac - cb - ad + bd.$$

hieraus mache ich den Schluß, daß minus mit minus multiplicirt plus gebe.

§. 46. Wer diesen geometrischen Lehr-
 satz noch nicht recht versteht, der kann
 den obigen Beweis, wenn er die Geometrie
 durchgelesen hat, noch einmal nach, leichtere Art
 holen, und inzwischen sich durch folgende
 Gedanken die Sache einigermaßen
 begreiflich machen. Das minus oder ne-
 gative muß man sich als eine Schuld vor-
 stellen. Wenn einer demnach — 10 fl.
 mit — 1 multipliciren soll, so ist es eben
 so viel, als wenn er 10 fl. Schulden ein-
 mal nicht heimgeben oder bezahlen dürf-
 te. Nach geschehener Multiplication mit
 — 1 wird er also wirklich um 10 fl. rei-
 cher seyn. Sollte er 10 fl. doppelt oder
 dreynach, das ist an mehrere Orten hin-
 schuldig seyn, und man sagte ihm, er darf
 diese zwey- oder dreymal wieder nicht be-
 zahlen, so würde er abermal um so viel
 reicher werden. Demnach gibt — 10 fl.
 multiplicirt mit — 2. das Product. + 20 fl.
 Das ist, 10 fl. Schulden, die man 2 mal
 nicht bezahlen darf, oder die einem 2 mal
 geschenkt werden, machen einen wirklich
 um 20 fl. reicher u. s. w. Nun glaube ich
 die Sache faßlich genug vorgetragen zu ha-
 ben.

ben. Ich will daher alles, was zur Multiplication in der Buchstabenrechnung gehört, in eine kurze Regel zusammen ziehen. Man multiplicirt alle Buchstaben der ersten Keyhe mit allen Buchstaben des Multiplikators, gibt denen die einerley Zeichen haben, im Product das Zeichen plus, denen aber, die verschiedene Zeichen haben, das Zeichen minus, und addirt endlich die Partialproducte nach den Additionsregeln zusammen. Das ist alles, was von der Multiplication gesagt werden kann. Vorzüglich muß man die kurze Regel behalten: Einerley Zeichen geben plus; verschiedene minus. (Eadem signa dant plus, diversa minus.)

Nutzbarkeit
der bey der
Multiplicati-
on vorkom-
menden zwey
kurzen
Hauptregeln;
nemlich ei-
nerley Zei-
chen geben
plus, ver-
schiedene ab-
er minus.

Das ist, plus mit plus, oder minus mit minus multiplicirt, gibt im Product plus.

Dann plus mit plus und minus mit minus sind ja einerley Zeichen. Hingegen plus mit minus multiplicirt gibt minus; denn plus und minus sind verschiedene Zeichen. Diese Regel wird auch bey der Division der Buchstaben zu Grunde gelegt, und ist eine von denenjenigen, welche ihren wahren Nutzen haben. In andern Fällen, wo man aus einem Exempel viele Particularregeln herausziehen bemühet ist, bin ich nicht der Meinung, daß man sich den Kopf damit anfüllen solle; dann sie werden nur wieder vergessen, weil sie eines theils zu zahlreich, andern theils

In welchen
Fällen es gut
seye, Regeln
zu geben;
und in wel-
chen Fällen
man selbiger
überhoben
seyn könne.

theils nur particular sind. Hingegen je wichtiger, fruchtbarer, allgemeiner, kürzer, einfacher, natürlicher und faßlicher eine Regel ist, desto leichter drückt sie sich dem Gemüthe ein, und destoweniger Mühe braucht man, sie zu behalten. Wir werden bey allen vorkommenden Gelegenheiten solche Regeln anpreisen, die übrige aber mit Vorbedacht theils übergehen, theils zeigen, daß man sich ohne Noth damit aufhalte. Ich will jezo noch ein Exempel von der Multiplication geben.

Man solle multipliciren

$$\begin{array}{r}
 a - b + c \\
 \text{mit } a + b - c \\
 \hline
 aa - ab + ac \\
 + ab - bb + bc \\
 - ac + bc - cc \\
 \hline
 aa - bb + 2bc - cc
 \end{array}$$

Summe
der Partial-
prod.

Dann a mit a gibt aa , a mit $-b$ gibt $-ab$, a mit $+c$ gibt $+ac$, $+b$ mit $+a$ gibt $+ab$, $+b$ mit $-b$ gibt $-bb$, $+b$ mit $+c$ gibt $+bc$; $-c$ mit $+a$ gibt $-ac$, $-c$ mit $-b$ gibt $+bc$, $-c$ mit $+c$ gibt $-cc$. In der Summe heben sich $+ab$ und $-ab$ gegeneinander auf, wie auch $+ac$ und $-ac$. Also bleibt die Summe aller Producte zusammen gezehlt $aa - bb + 2bc - cc$.

Exempel der
Buchstaben-
multiplica-
tion, wo alle
Fälle vorkom-
men.

Wie man die 6. 47. Nun ist noch übrig, daß wir
 Producte auch zeigen, wie man die Producte schreibe
 derienigen bet und ausspricht, wenn ein Buchstabe
 Buchstaben, mit sich selbst etlichmal multiplicirt wird.
 die mit sich J. E. wenn ich a mit a multiplicire, so
 selbst multi- kann ich schreiben aa , und wenn ich dieses
 plicirt wer- Product noch einmal multiplicire, so heißt
 den, schreibe es nach der allgemeinen Regel aaa . Al-
 und ausspre- lein die Mathematik hat hier einen kürzern
 che. mal nemlich ein Buchstab mit sich selbst
 multiplicirt wird, so viel Einheiten muß
 das von hinten, und zwar etwas oberhalb
 angehängte Zahlzeichen, in sich begreifen.
 Es ist also ein grosser Unterschied zwischen
 $3a$ und a^3 , jenes heißt überhaupt 3 mal a ,
 dieses aber a mal a mal a . Wie J. E. 3. 10
 oder 3 mal 10 nur 30 ist, hingegen 10^3
 oder 10 mal 10 mal 10 die Zahl 1000
 ausmacht. Man spricht den Ausdruck a^3
 aus: a drey; oder auch, a in der dritten
 Dignität oder Potenz; wie wir sogleich
 hören werden. Wenn man also a vier-
 mal mit sich selbst multiplicirt, so heißt
 das Product a^4 , und wenn man es m mal
 mit sich selbst multiplicirt, so heißt es a^m ,
 in welchem Falle m bedeuten kann, 4, 5,
 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, u. s. w. folg-
 lich ein allgemeiner Ausdruck ist.

6. 48. Diese Lehre ist besonders wich-
 tig, und breitet ihren Nutzen durch die
 ganz

ganze Algebra und höhere Geometrie aus. Wir wollen daher nicht nur die hier vorkommende Namen und Zeichen, sondern auch die Multiplication dieser Potenzen unter und miteinander selbst erklären. Größen, in so ferne sie mit sich selbst multiplicirt werden, heißen Dignitäten oder Potenzen; je öfter sie nun mit sich selbst multiplicirt werden, desto größer werden die Dignitäten. Z. E. a mit a multiplicirt gibt aa , oder a^2 , folglich ist a in der zweiten Dignität; a^3 ist die dritte Dignität von a , a^4 die vierte Dignität u. s. w. Hieraus siehet man, daß a für sich allein, wenn es gar nicht multiplicirt wird, in seiner ersten Dignität stehe, und folglich geschrieben werden könne a^1 ; demnach werden die Dignitäten in richtiger Ordnung der gewöhnlichen Zahlzeichen aufsteigen; z. E.

$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$ u. s. w. Progression der Dignitäten oder Potenzen.

Die Zahlen, die hinter den Buchstaben stehen, heißen Exponenten; also ist 2 der Exponent von a in der andern Dignität; 7 ist der Exponent von a in der siebenden Dignität. Und bey dem Ausdruck $(a+b)^3$ ist 3 der Exponent von $(a+b)$ in der dritten Dignität. Denn man kann auch ganze Summen mit sich selbst multipliciren, in welchem Fall die Summe nur in () eingeschlossen, und hinter das Zeichen oberhalb

Vorzug die-
ser erfunde-
nen Nah-
men.

halb der Exponent gesetzt wird. Diese
Nahmen der Dignitäten und Potenzen,
die Keppler und Cartesius ausgefunden,
sind viel natürlicher, als wenn man nach
der Mode der Alten immer Zensus, Zen-
sicensus, Zensicubus, Zensifurdesoli-
dus u. s. w. sagt. In der Geometrie
heißt die zweite Dignität Quadrat, die
dritte Cubus; was aber weiter hinaus
geht, behält die von uns schon erklärte
Nahmen bey. Den Grund von dem
Nahmen des Quadrats und des Cubus
wollen wir zu seiner Zeit erklären und an-
führen.

Wie man die
Dignitäten
oder Poten-
zen mit ein-
ander multi-
plicire.

§. 49. Nachdem wir die hier vorkommende Nahmen erklärt haben, müssen wir auch zeigen, wie man die Dignitäten mit einander multiplicirt. Z. E. ich solle a^3 mit a^2 multipliciren. Die Sache ist leicht, wenn ich die allgemeine Regel der Multiplication §. 42. hier anwende. Damit wir aber deutlicher davon überzeugt werden, so wollen wir a^3 und a^2 nach der angeführten Regel schreiben und sagen aaa solle mit aa multiplicirt werden. Nun werden die Buchstaben nur zusammen gesetzt §. 42. folglich wird das Product seyn $aaaaa$; das ist, nach einem kurzen Ausdruck a^5 . Ferner ich solle a^1 mit a^2 , oder a mit aa , multipliciren, so habe ich aaa ; das ist, a^3 ; ich solle a^4 mit a^1 das ist $aaaa$ mit $aaaaa$ multipliciren,

so

so ist das Product $aaaaaaaaa$, oder a^9 .
 Da nun $a^2 \cdot a^3 = a^5$, $a^1 \cdot a^2 = a^3$, a^4 . Auflösung
 $a^1 = a^0$, so kann ich eine leichte Regel aus und Beweis.
 diesen Exempeln nicht nur, sondern aus
 der Natur der Multiplication in Buch-
 staben §. 42. herausziehen, und ohne noch
 was von den Logarithmen zu wissen, aus Die Multi-
 sichern Gründen sagen, man multiplici- plication der
 ret die Dignitäten von einerley Benen- Potenzen
 nung, wenn man ihre Exponenten wird in eine
 zusammen addirt. Es müssen aber Addition ih-
 Dignitäten von einerley Benennung oder rer Exponen-
 von einerley Buchstaben seyn: z. E. a^3 . ten verwan-
 a^7 wird a^{10} ausmachen. Hingegen x^3 delt.
 multiplicirt mit y^2 ist eben $x^3 y^2$, weil ich Warum die
 hie zweyerley Buchstaben habe; und al- Potenzen in
 so die Exponenten weder des x noch des y diesem Fall
 zusammen setzen kann. Dann wenn ich einerley Be-
 die allgemeine Regel zu Rath ziehe, so fin- nenung
 de ich, daß ich xxx mit yy multipliciren sol- haben.
 le; diß gibt nun ein Product $= xxxyy$
 oder $x^3 y^2$. Wenn ich aber x^3 mit x^2
 multiplicire, so ist das Product x^5 , und
 wenn ich y^3 mit y^2 multiplicire, so habe
 ich y^5 . Diese Regel muß man sich wohl
 bekannt machen, wenn man in dem fol-
 genden fortkommen will. Sie heißt noch weitere An-
 malen also: Dignitäten von einerley Be- wendung des
 nennung werden multiplicirt, wenn man gegebenen
 ihre Exponenten addirt, und die Summe Regel;
 davon der einfachen Dignität von hinten
 anhängt. Z. E. $b^3 \cdot b^6 = b^9$, $c^4 \cdot c^{10} =$
 c^{14} .

§ 4. Gesezt aber ich sollte *am* multipliciren mit a^n , wenn nemlich der Exponent eine unbestimmte allgemeine Gröſſe ist; was ist alsdann zu thun? Hier bleibe ich wieder bey meiner Regel, und sage das Product wird seyn: $am + n$. Ich addire nemlich die 2 Exponenten zusammen, und ſeße sie dem Buchstaben oberhalb nach, wie ich die Zahlen geſetzt habe. Ferner wenn ich x^m mit x^n und noch einmal mit x^r multipliciren soll, so wird das Product seyn x^{m+n+r} . Eben so ist y^m multiplicirt mit y^3 im Product y^{m+3} . Aus diesen Exempeln siehet man, daß eine allgemeine Regel auch solche Fälle bestimme, die der Einbildungskraft nicht so klar vorgestellt werden können, wie z. E. es in der vorhabenden Materie bey den Zahlen geschehen ist, welche wir alle auf die allgemeine Regel §. 42. reducirt haben.

§. 50. Wie man die Dignitäten mit einander multipliciren kann, so läßt sich auch eine Dignität zu einer höhern durch die Multiplication erheben. Z. E. ich kann nicht nur x mit sich selbst multipliciren, und durch die Multiplication zur zweyten Dignität xx oder x^2 erheben; sondern auch xx selbst wiederum 2, 3, oder mehrmalen mit sich multipliciren, und also zur zweyten, dritten Dignität u. s. w. erheben. Wenn ich xx drey mal mit sich selbst multiplicire, so habe ich $xxxxxx$, oder

da x^6 , wenn ich a^3 zweymal mit sich selbst multiplicire, so habe ich $aaaaaa$, oder a^6 , welches die zwente Dignität von a^3 ist, die sechste aber von a^1 . Hieraus läßt sich abermal eine Regel lernen, welche die folgende ist: gegebene Dignitäten werden zu höhern erhoben, wenn man ihre Exponenten mit einander multiplicirt. Z. E. ich solle a^3 in die 4 Dignitäten erheben, so darf ich nur den Exponenten 3 mit dem gegebenen Exponenten 4 multipliciren, da ich dann a^{12} habe. Dann wenn ich a^1 viermal mit sich selbst multiplicire, so habe ich gerade a^{12} . Folglich wenn ich a^m zur Dignität n erheben solle; so wird die neue Dignität nothwendig heißen a^{mn} ; eben so ist x^2 zur Dignität m erhoben $= x^{2m}$ und y^3 zur Dignität 3 erhoben $= y^{3m}$. Auch diese Regel ist wie die vorige von besonderm Gewichte. Beide werden bey der Division wieder vorkommen, da sich dann schon der Anfang ihrer Nutzbarkeit zeigen wird.

Ausführung und Beweis:

es geschieht nemlich durch die Multiplication der Exponenten.

weitere Anwendung und Nutzbarkeit dieser Regel.

§ 51. Dividiren heißt eine Zahl von einer andern gegebenen Zahl erlichmal abziehen, oder eine gegebene Zahl erlichmal kleiner machen. Z. E. ich solle 6 durch 2 dividiren; so muß ich 2 von 6 so oft abziehen als ich kann, und hernach besonders merken, wie oft ich die Zahl 2 von 6 abgezogen habe. Ich kann sie nemlich 3 mal

Was dieses heißen heiße.

mal abziehen; dann 2 von 6 läßt vier, 2 und wie sie von 4, läßt 2, 2 von 2 läßt nichts. Diese Arbeit wäre in grossen Exempeln allzu mühsam; man hat daher eine Kunst gefunden, schneller zu dividiren erfunden, davon ich sogleich reden werde, wenn ich vorher gezeigt, daß sich auch die andere Erklärung der Division hieher schicke. Ich solle die schneller, als Zahl 6 etlichmal kleiner machen. Nun wird mir eine Zahl gegeben, welche anzeigt, wie vielmal kleiner sie werden solle. Z. E. 2 mal. Wenn ich nun sagen kann, wie die Zahl heiße, welche 2 mal kleiner als 6 seye, so habe ich 6 durch 2 dividirt. Im gegenwärtigen Fall ist es die Zahl drey. Man merke hier den Unterschied zwischen der Redensart um wie viel, und um wie vielmal. In der Subtraction finde ich, um wie viel eine Grösse kleiner worden seye; so ist z. E. 6 wenn es um 2 kleiner wird, 4; in der Division hingegen merke ich, um wie viel mal etwas kleiner werde. Hieraus stehet man auch zugleich, daß die gefundene Zahl in den gegebenen grössern so oft enthalten seyn müsse, als in der gegebenen kleinern Eines enthalten ist. Darin die gefundene Zahl 3 ist in 6 zweymal, und eins in 2 auch zweymal enthalten. Die Haupt-Nahmen, die man bey der Division braucht, sind die zu dividirende Zahl, oder der numerus dividendus, der Divisor, und den

der Quotient. Was die zu dividirende Zahl ^{Erklärung} sene, ist vorhin klar. Der Divisor ist die Zahl, welche anzeigt; wie viel mal eine gegebene Zahl kleiner gemacht werden solle. Der Quotient ist die Zahl, welche durch diese etlichmalige Verminderung gefunden wird und heraus kommt, welcher so vielmal kleiner ist als die zu dividirende Zahl, um so vielmal eins kleiner ist als der Divisor; das ist, welcher Quotienten in der zu dividirenden Zahl so oft enthalten, als eins in dem Divisore. Die Rede ist hier von ganzen Zahlen, wie auch bey der Multiplication nur ganze Zahlen vorkommen. Von gebrochenen Zahlen werden wir im nächsten Capitel reden.

§. 52. Nun können wir schon zeigen, wie die wirkliche Division geschehe. Man ^{Wie die} setzt den Divisor unter die zu dividirende ^{wirkliche Di-} Zahl, und zwar zur Linken, oder unter die erste und am meisten bedeutende Zahl; ^{Division gesche-} zeichnen zuerst, doch so, daß, wenn das ^{be,} erste Zahlzeichen des Divisors grösser ist als das erste Zahlzeichen der zu dividirenden Zahl, der Divisor um eine Stelle hinter sich gerückt werde; hernach sucht man durch das Einmal eins, wie oft der Divisor in den gerade oben geschriebenen Zahlen ungefähr enthalten seye, und schreibt die gefundene Zahl hinter einen nach der Stelle der Einheiten gezogenen Strich; wenn sie nun mit dem Divisor

G 2

multiplieirt nicht grösser wird, als die
 und zwar zu, unmittelbar obenstehende Zahlen, so ist
 erst mit ein, sie der Rechte Quotient; das Product des
 fachen Zahl, Quotienten in den Divisor wird von dem
 zeichen, sich darauf beziehenden obern Zahlen sub-

trahirt, und sodann der Rest von neuem
 nach eben dieser Regel dividirt, bis man
 auf die letzte Classe der Einheiten kommt.

Dieses kann nun auf zweyerley Art bes-
 was unter werkselliget werden; dann entweder dis-

sich dividiren vidirt man unter sich, oder über sich.

heisse, und in Die erste Art ist leichter; wir wollen sie

welchen Fäl- le 548 dividiren durch 2; das Exempel

len diese Art wird folgender massen gesetzt:

zu dividiren

besser seye,

als die gleich

folgendes:

$$\begin{array}{r}
 548 \mid 274 \\
 (2) \cdot \cdot \\
 \hline
 4 \cdot \cdot \\
 \hline
 14 \cdot \\
 (2) \cdot \\
 \hline
 14 \\
 \hline
 8 \\
 (2) \\
 \hline
 8 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

ich sage 2 in 5 ist 2 mal enthalten; setze
 daher den Zweyer in die Stelle des Quo-
 tienten, und multiplicire den Quotienten
 mit dem Divisor; das Product 4 ziehe
 ich von 5 ab; und setze zum Rest 1 noch
 die

die folgende Zahl; dann rücke ich den Divisor eine Stelle weiter zurück und sage 2 in 14 ist 7 mal enthalten; den Quotienten 7 multiplicire ich wieder mit dem Divisor 2, und subtrahire das Product 14, welches gerade aufgeht; endlich setze ich das Zahlzeichen 8 herunter, und dividire nochmalen mit 2; da dann der Quotient 4 ist, und das Product 8 wiederum aufgeht; folglich ist der ganze Quotient 274. Was über Nun kann man eben dieses Exempel auch über sich dividiren, in welchem Fall es sich dividiren also gesetzt wird:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 274 \\ 848 & \\ 222 & \end{array}$$

hier sage ich, 2 in 5 habe ich 2 mal; (setze also 2 in die Stelle des Quotienten) 2 mal 2 ist 4, 4 von 5 läßt 1; (streiche daher den 2 und 5 aus, und schreibe über den Fünfer den Eins;) dann setze ich den Divisor unter die folgende Stelle, und sage abermal 2 in 14 habe ich siebenmal; (dann der Eins gilt hier noch; und da der Vierer nach steht, so heißt die Zahl 14; woran man sich gewöhnen muß, Zahlen aussprechen zu lernen, die oft 2 bis 3 Zoll hoch stufenweis übereinander stehen; man spricht sie aber eben so aus, wie die Zahlen im numeriren ausgesprochen werden;) 7 setze ich in die Stelle des Quotienten, und sage 7 mal 2 ist 14, 14 von 14 geht auf;

auf; dann streiche ich den Vierer und Einsler aus. Endlich setze ich den Divisor unter den Achter, und sage 2 in 8 habe ich 4 mal, setze 4 in die Stelle des Quotienten, und sage abermal 2 mal 4 ist 8, 8 von 8 geht auf; und streiche den 8 und 2 vollends aus. Diefi heißt über sich divis

In welchen diren. In kleinen Exempeln, besonders wo der Divisor nur eine einfache Zahl ist, Sollen diese kann man diese Art für bequemer halten, Methode und der ersten, wegen ihrer Kürze vorzuziehen, ziehen; hingegen in grösseren Exempeln

wird durch das viele austreichen manchen malen Verwirrung entstehen, welche bey dem unter sich gehenden dividiren verhästet wird. Ehe ich nun weiter gehe, muß ich zeigen, daß man wirklich durch die angeführte Methoden dasjenige erhält,

Beweis der was man verlangt. Man will wissen, Divisions- wie oft 2 in 548 enthalten seye; weil nun Regeln. 548 gleich ist $500 + 40 + 8$, so suche ich zuerst, wie oft 2 in 500 enthalten seye; da

finde ich dann leicht, daß es 200 mal enthalten, und 100 für die folgende Stelle übrig bleibe; ich setze also 200; hernach forsche ich wie oft 2 in $100 + 40$, oder 140 enthalten seye, die Antwort ist 70 mal; dann ich darf 140 nur als 14 Zehner betrachten, so finde ich daß sie durch 2 getheilt 7 Zehner geben; diese setze ich auch besonders; endlich suche ich noch, wie oft 2 in 8 Einheiten enthalten seye; Antwort, 4 mal;

4 mal; folglich ist der ganze Quotient $300 + 70 + 4$ das ist 274. Hieraus ist klar, daß ich mir nur unnöthige Mühe machen würde, wenn ich allemal sagen wollte; wie oft ist der Divisor in so viel Tausendern, in so viel Hundertern, in so viel Zehner u. s. w. enthalten u. indeme die Stellen der Zahlzeichen selbst nach der Decimalprogreßion, wie wir im ersten ^{und ihr Vor} Capitel gezeigt haben, diesen Wehrtheil der gefundenen Zahlen bestimmen, wenn ich ^{theil, Zeit} sie schon in meiner Rechnung, Zeit und Mühe zu sparen, als bloß einfache Zahlzeichen ansehe und ausspreche. Inzwischen ist dieses der Beweis von der Division, welcher sich auf alle nur mögliche Exempel anwenden läßt. ^{sparen.}

§. 53. Man muß auch mit ^{Wie man mit} zwei und noch mehr Zahlzeichen dividiren können. ^{zwei und} Folglich müssen wir auch von diesem Fall einige Exempel geben. Hier wird man ^{mehreren} sehen, wie bequem die Manier unter sich zu dividiren seye. Man solle 64285 ^{dividire,} durch 25 dividiren. Ich setze die Zahl und ihren Divisor nach der gegebenen Regel:

$$\begin{array}{r}
 64285 \overline{) 2571\frac{10}{17}} \\
 (25) \dots \\
 \underline{50} \dots \\
 14.2\dots \\
 (25) \dots \\
 \underline{125} \dots \\
 178 \dots \\
 (25) \dots \\
 \underline{175} \dots \\
 35 \\
 (25) \\
 \underline{25} \\
 10 \text{ Rest}
 \end{array}$$

Hier sage ich 2 in 6 könnte ich zwar dreymal nehmen, aber wegen dem folgenden fünfer darf ichs nur 2 mal nehmen, dann 25 ist in 64 nur zweymal enthalten, setze also 2 in die Stelle des Quotienten, und sage 2 mal 25 gibt 50; 50 von 64 läßt 14, zu dieser Zahl setze ich den folgenden Zweyer herunter, und schreibe meinen Divisor abermal so, daß sein letztes Zahlzeichen zur Rechten unter das letzte Zahlzeichen der zu dividirenden Zahl ebenfalls zur Rechten zu stehen komme; alsdann dividire ich wieder, und sage 2 in 14 könnte ich 7 mal, aber wegen dem folgenden fünfer kann ichs nicht so oft nehmen; ich will es also versuchen, und ihn fünfmal nehmen; weiß 25 in 142 wenigstens 5 mal enthalten seyn

gen dem Entleihen zum Dreier; 5 mal 2 ist 10 und 2 behalten ist 12, 12 von 13 läßt 1; 25 in 178 habe ich 7 mal und so weiter. Diese Methode hat Herr Barou von Wolf in seinen Anfangsgründen gebraucht. Nach der allergeeinsten Weise bekommt endlich das Exempel auch diese gemeine Me- Gestalt;

rhode,

$$\begin{array}{r|l}
 223(1 & \\
 2273(0 & \\
 64288 & 2571 \\
 28888 & \\
 222 &
 \end{array}$$

Dann ich sage: 2 in 6, 2 mal; 2 mal 2 ist 4, 4 von 6 läßt 2; 2 mal 5 ist 10, 1 von 2 läßt 1, 0 von 4 läßt 4; ferner 2 in 14, 5 mal; 2 mal 5 ist 10, 1 von 1 geht auf, 0 von 2 bleibt 2; 5 mal 5 ist 25, 2 von 4 läßt 2; 5 von 2 kann ich nicht; entlehne also 1 von 2; streiche es sogleich aus, und setze 1 darüber; 5 von 12 läßt 7; 2 in 17 habe ich 7 mal, 2 mal 7 ist 14, 1 von 1 geht auf; 4 von 7 läßt 3; 5 mal 7 ist 35, 3 von 3 geht auf, 5 von 8 läßt 3; endlich 2 in 3 habe ich 1 mal; 2 mal 1 ist 2, 2 von 3 läßt eins; 1 mal 5 ist 5; 5 von 5 geht auf; oder läßt 0.

warum man Der Rest wird in () eingeschlossen. Diese Erlernung se Methoden nun kann man, wegen dem der leiten wo Meibo, ausgestrichenen Zahlen, nicht ohne münd- den einen le- lichen Unterricht vollkommen lernen; weil nem:

nemlich alle Zahlen ausgestrichen sind, lebendigen und ein Anfänger durch einen bloß schriftlichen Unterricht es nicht sogleich einsieht, welche Zahlen hier und da noch in der Operation gelten. Was aber die Art unter sich zu dividiren betrifft, so hat man keinen lebendigen Lehrmeister dazu nöthig, wenn man auf das, was wir gesagt haben, Achtung geben will. Wer nun mit 2 Zahlen dividiren kann, der kann es auch mit 3 und mit noch mehrern. Uebrigens was einer für eine Methode von Jugend auf gelernt hat, dabey wolle er bleiben, damit er sich nicht bey Erlernung vieler Methoden in Verwirrung bringe. Dann alle Manieren zu dividiren führen zu einerley Zweck, und beruhen auf dem §. 52. gegebenen Grund. Kommen bey der Division in der zu dividirenden Zahl Nullen vor, so hat man, wenn man nicht wirklich dividiren kann, oder wenn der Rest, ehe die Division zu Ende gebracht ist, allzuklein wäre, weiter nichts zu thun, als daß man in die Stelle des Quotienten, um den Wehrt des folgenden Zahlzeichens nicht zu groß zu machen, eine Null setzt, und sodann den Divisor um eine Stelle weiter vorrückt. Z. E. wenn ich 609 dividire durch 3, so ist die ganze Operation diese:

$$\begin{array}{r|l} 203 & 609 \\ 3 & 333 \\ \hline & 276 \end{array}$$

dann

Wie man bey Erlernung der Division Manieren sich vor Verwirrung hüten sollte.

Was man zu thun, wenn in der zu dividirenden Zahl Nullen oder auch kleinere Zahlen vorkommen, als der Divisor hat, vorkommen,

Dann ich sage: 3 in 6 habe ich 2 mal, 3 in 0 nullemal, 3 in 9, 3 mal. Eben so geht es, wenn ich 627 durch 3 dividire;

$$\begin{array}{r|l} 627 & 209 \\ 333 & \end{array}$$

3 in 6 habe ich 2 mal, 3 in 2 nullemal, 3 mal 0 ist nulle, 0 von 2 läßt 2, 3 in 27 gibt 9 mal. Sollten aber im Divisore wie man dividire, wenn der Mitte oder am Ende stehen; im ersten Fall werden sie, wie in der Multiplication, behandelt; z. E.

Nullen in sich enthält, und zwar erstlich in der Mitte,

$$\begin{array}{r} 4808 \overline{) 23} \\ (204) \\ \hline 408 \\ 728 \\ (204) \\ \hline 612 \\ \hline 116 \text{ Rest.} \end{array}$$

zweitens am Ende: da so werden sie abgeschnitten, und die Division wird mit den blossen Zahlzeichen dann eine verrichtet. Z. E. Man solle 34086 durch 1000 dividiren, so ist der Quotient $34\frac{86}{1000}$, oder 34 $\overline{) 086}$; weil 1 gar nicht dividiret, kommen und die Nullen nur die Plätze ausfüllen können. Eben so ist 63582 durch 3000 dividiret.

dividirt, = $\frac{63}{3} \mid 482$, das ist, wenn
man wirklich dividirt,

$$\begin{array}{r} 63 \mid 482 \\ 33 \mid 000 \end{array} \quad 21 \frac{482}{3300}$$

Man dividirt nemlich blos mit 3, wenn man vorher am Ende gleichviel Zahlzeichen, als Nullen der Divisor hat, abschneidet, und sagt 3 in 6 ist 2 mal, 3 in 3 einmal; das übrige gibt einen Bruch. Die Ursache ist leicht zu verstehen; die abgeschnittene Zahlzeichen sind immer kleiner als der Divisor, weil allemal von der zu dividirenden Zahl ein Zahlzeichen weniger, als der Divisor Zeichen hat, abgeschnitten wird. Folglich läßt sich der Rest niemalsen durch den ganzen Divisor theilen. Wer aber daran zweifelt, darf nur die Rechnung nach der allgemeinen Regel machen. Z. E.

Warum man am Ende der zu dividirenden Zahl so viel Zahlzeichen, als der Divisor am Ende Nullen hat, abschneiden dürfte,

$$\begin{array}{r} 63482 \mid 21 \frac{482}{3300} \\ (3000) \mid \\ \hline 6000 \\ \hline 3482 \\ (3000) \\ \hline 3000 \\ \hline 482 \end{array}$$

Woraus deutlich erhellet, daß man allemal so viel Zahlzeichen als Nullen dem Divisor

Divisor angehängt sind, abschneiden dürfen, wenn man nicht ohne Noth längere Zeit und Mühe zu einem Exempel von dieser Art gebrauchen will.

Von der Division der genannten Zahlen. §. 54. Die Division der genannten Zahlen wird eben so eingerichtet, wie die Multiplication; das heißt, man bringt die zu dividirende Zahlen vorher unter einerley Benennung, und macht die Gulden zu Kreuzer, die Ruten zu Schuh, die Schuhe zu Zoll u. s. w. und dividirt sodann nach der Regel §. 52. Demnach werden 3 fl. 24 kr. durch 15 dividirt, wenn ich die Gulden durch die Multiplication mit 60 zu Kreuzer mache, und zu 3mal 60 die 24 addire, hernach gewöhnlicher massen mit 15 dividire; nemlich

$$\begin{array}{r} \text{X} \\ 89 \\ 180 + 24 = 204 \text{ kr.} = 204 \text{ } | 13 \frac{2}{3} \text{ fl.} \\ \underline{15} \quad \quad \underline{15} \quad \quad \text{X} 88 \\ \text{X} \end{array}$$

Sollte ein Quotient herauskommen, der grösser wäre als 60, so mache ich in diesem Fall durch die Division die Kreuzer wieder zu Gulden, und was übrig bleibt, setze ich in die Classe der Kreuzer. Und das ist nun das vornehmste, was von der Division in ungenannten und genannten Zahlen vorgetragen werden kann. Ehe wir

Wir die Division nach der Buchstabenrechnung abhandeln, wollen wir vor noch, unserer Gewohnheit gemäß, einige jedermann faßliche und leichte Sätze aus den bisherigen Regeln nachholen. Der erste ist: Eins dividirt nicht; folglich ist $\frac{1}{1}$ oder 6 dividirt durch eins = 6. Wo nur ein Erbe ist, da hat man keine Theilung nöthig; das heißt Eins dividirt nicht. So gemein dieser Satz ist, so nützlich wird er uns im folgenden werden. Wie derum eine durch sich selbst dividirte Zahl gibt den Quotienten Eins; das ist der zweite Satz. $\frac{6}{6}$ oder 6 dividirt durch 6 ist eins; 3 in 3, 20 in 20, 100 in 100 ist einmal enthalten; auch dieser leichte und faßliche Satz wird uns in Zukunft zu nützlichen Folgen Gelegenheit geben: Er heißt noch einmal also: Eine durch sich selbst dividirte Zahl gibt Eins. An diesen zween Sätzen wollen wir jezo genug haben, und nun auch die Division der Buchstaben vortragen.

§. 55. In der Buchstabenrechnung werden die Größen entweder durch bloße Zeichen, oder wirklich durch die Absonderung und Auflösung der in der Multiplication geschehenen Verbindung dividirt. Der erste Fall ist leicht. Sollte ich a durch b dividiren, so schreibe ich bloß $\frac{a}{b}$

oder

durch Zeichen
bemerkt
wird,

oder $a : b$; eben so wenn ich $ab + cd$ dividiren solle durch $x - y$, so ist der Quotient

$$\frac{ab + cd}{x - y}$$

$$\text{oder } (ab + cd) : (x - y)$$

folglich wird die Sache blos durch die Zeichen ausgedruckt, welche ich in der Einleitung von der mathematischen Sprache vorgetragen habe. Der andere Fall ist

Zweiter Fall,

wenn man

wirklich dividiren kann;

auch nicht sonderlich schwer. Dann wird die Buchstaben durch die Multiplication verbunden werden, so werden sie durch die Division wieder abgesondert; nun werden sie durch jene Operation blos zusammen gesetzt §. 42. folglich muß man sie durch diese wieder von einander trennen, und den einen der getrennten Buchstaben in die Stelle des Quotienten setzen, z. E. ab soll dividirt werden durch a , so ist der Quotient b , oder durch b , so ist der Quotient a ; oder es ist

$$\begin{array}{r} ab \mid b \\ a \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} ab \mid a \\ b \end{array}$$

$$\text{wie } \begin{array}{r} 6.3 \mid 3 \\ 6 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 6.3 \mid 6 \\ 3 \end{array} \text{ ist.}$$

Dann wenn man beiderseits den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, so hat man die zu dividirende Zahl wieder; nemlich b mal a ist ab , und a mal b ist ab ; und 3 mal $6 = 6.3$ und 6 mal $3 = 6.3$. Nach dieser Regel werden alle Exempel in der

Buch

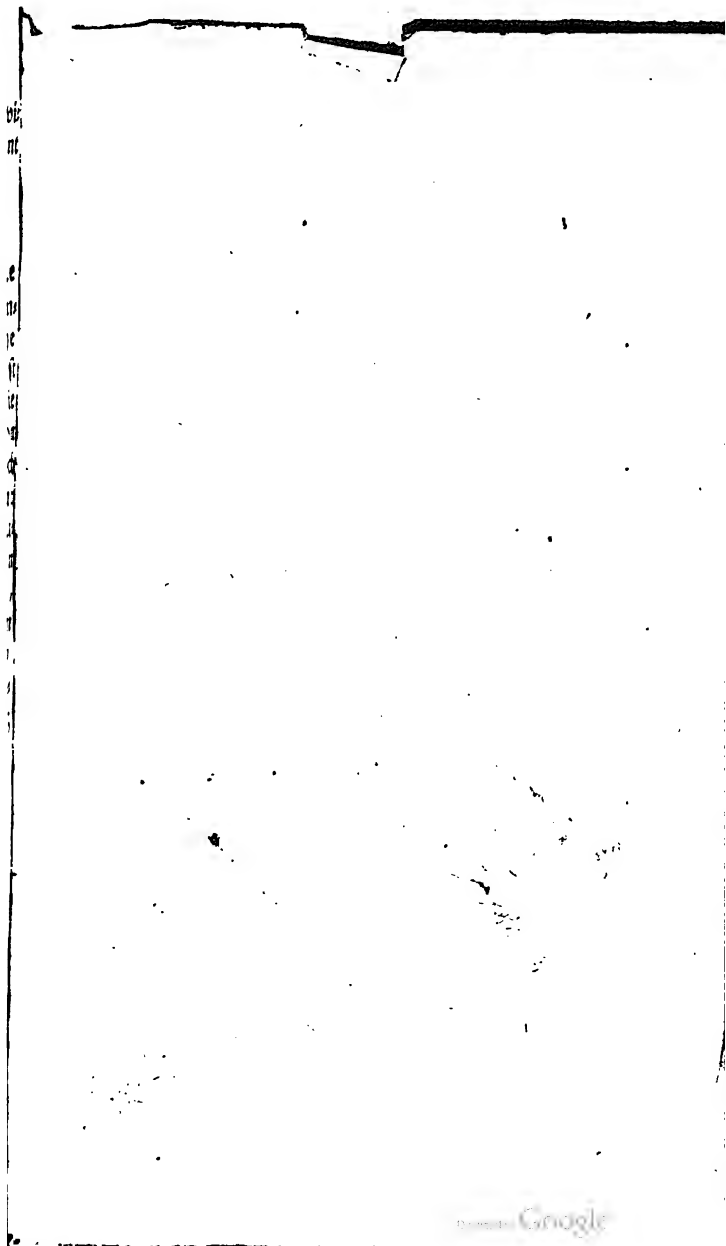


Fig. 23

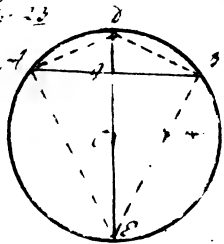


Fig. 24

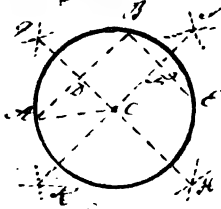


Fig. 25



Fig. 28

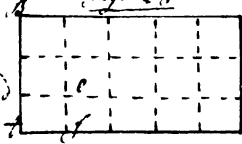


Fig. 26



Fig. 30

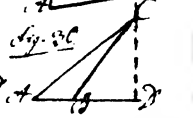


Fig. 27

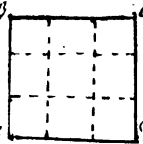


Fig. 29

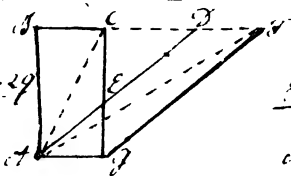


Fig. 31

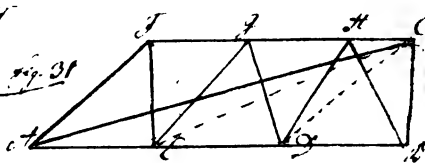


Fig. 32



Fig. 25

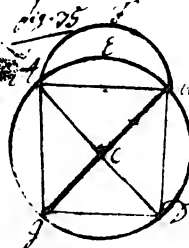


Fig. 34



Fig. 33

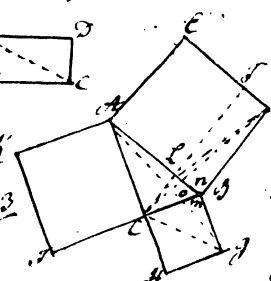


Fig. 36



Fig. 38

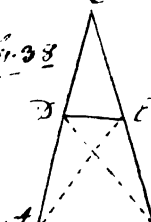


Fig. 39

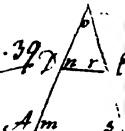


Fig. 40

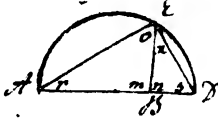
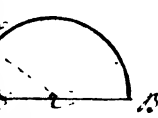


Fig. 37



Buchstabenrechnung gerechnet; also ist aab dividirt durch ab im Quotienten a , abc dividirt durch ac ist b ; u. s. w.

$$\begin{array}{r|l} aab & a \\ (ab) & \\ \hline aab & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} abc & b \\ (ac) & \\ \hline acb & \end{array}$$

Dann im Product ist es gleichviel, wo die Buchstaben stehen, wann sie nur neben einander stehen; so ist $abc = acb = cba$, u. s. w. wie wir schon gesagt haben. Weil nun $\frac{ab}{b} = a$, und $\frac{ab}{a} = b$, nach

den Multiplicationsregeln §. 42. so ist nothwendiger Weise auch $\frac{a}{b} \cdot b = a$; dann

man darf nur nach den Grundsätzen der Einleitung schreiben

$$\frac{ab}{b} = a$$

$$\frac{ab}{b} = a \cdot \frac{b}{b}$$

$$\frac{a \cdot b}{b} = b;$$

Da nun diese Rechnung allgemein ist, so wird $\frac{m}{n} \cdot n = m$,

$$\frac{ab}{mn} \cdot mn = ab, \quad \frac{acd}{b} \cdot b = acd \text{ u. s. w.}$$

Das ist eine Zahl durch eine andere dividirt, und

und durch eben diese wieder multiplicirt, wird der gegebenen Zahl gleich seyn.

Was für Nebenfälle bey der Buchstaben-division noch vorkommen können.

§. 56. Nun können bey dieser Operation eben die Nebenfälle noch vorkommen, deren wir schon bey der Multiplication gedacht haben. Das ist: Es kann geschehen, daß man nicht nur plus mit plus, sondern auch minus mit minus und plus mit minus, oder welches gleichviel ist, minus mit plus dividiren solle. Hier nun hat die Division einerley Regeln mit der Multiplication. Dann weil sie eine bloße Auflösung der durch die Multiplication verbundenen Buchstaben ist, und die Auflösung auf gleiche Weise geschehen muß, wie die Verbindung geschehe, so muß man beederselts nach einerley Regeln handeln, und auch bey der Division merken, daß einerley Zeichen plus und verschiedene im Quotienten, wie bey der Multiplication im Product, minus geben.

Wie man minus mit plus dividire.

Z. E. ich solle $aa - ad$ dividiren durch a , so ist der Quotient $a - d$; dann

Auflösung und Beweis.

$$\begin{array}{r|l}
 aa - ad & a - d \\
 (a) & \\
 \hline
 aa & \\
 \hline
 & - ad \\
 & (a) \\
 & - ad \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

a in aa ist a mal; a mal a ist aa , aa von aa geht

aa geht auf; nun setze ich $-ad$ unter den Strich, und brauche meinen Divisor wiederum, wie bey den Zahlen. a in $-ad$ ist $-d$, $-d$ mit $+a$ gibt $-ad$, $-ad$ von $-ad$ geht auf. Wenn ich a in $-ad$ $+d$ mal genommen hätte, so wäre mein Product $+ad$ geworden, und das hätte sich gegen $-ad$ durch die Subtraction nicht aufheben lassen. Da es nun zwischen $-$ und $+$ kein drittes gibt, so ist klar, daß verschiedene Zeichen in der Division, wie in der Multiplication, minus geben. Die Probe ist leicht zu machen. Man multiplicire nur den Quotienten $a-d$, mit a , so wird $aa - ad$ herauskommen: welches abermal, weil diese Probe auf die Erklärung der Division sich gründet, einen richtigen Beweis gibt, daß wenn man minus mit plus dividirt, der Quotient minus oder negativ werde.

§. 57. Eben so können wir erweisen, wie man mit $-$ durch $-$ dividirt plus gebe. nus mit $-$. Man solle $aa - ad$ mit $-a$ dividiren, so nus dividire; werde ich sagen müssen.

$$\begin{array}{r}
 aa - ad \mid -a + d \\
 (-a) \\
 \hline
 aa \\
 - ad \\
 (-a) \\
 - ad \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Auflösung

§ 2

$-a$

$-a$ in $+aa$ ist $-a$ mal §. 56; $-a$ mit $-a$ multiplicirt gibt $+aa$, §. 45. $+aa$ von $+aa$ geht auf; $-a$ in $-ad$ ist $+d$ mal; $+d$ mit $-a$ multiplicirt ist $-ad$; $-ad$ von $-ad$ geht auf. Dann wenn ich $-a$ in $-ad$ wollte $-d$ mal nehmen, so würde das Product aus $-d$ in $-a$ positiv und $+ad$ werden, §. 45. $+ad$ aber läßt sich in der Subtraction gegen $-ad$ nicht aufheben. Eben dieses sieht man auch in der Probe: denn der Quotient $-a + d$ multiplicirt mit dem Divisor $-a$ bringt gerade wieder die zu dividirende Zahl heraus, nemlich $aa - ad$. Wenn man nun ein grosses Exempel dividiren solle, so wird man durch die Beobachtung der vorgetragenen Regeln so leicht oder noch leichter zurechte kommen, als bey der Division in ungenannten Zahlen. Ob nun schon grosse und weildaufige Exempel in der Buchstabendivision selten vorkommen, und man meistens durch eine allgemeine Formel das, was zu dividiren ist, blos anzeigt: so wollen wir doch eines geben, und alle Regeln dabey anzubringen suchen. Vorhero solle aber folgendes noch vorangeschicket werden

$aa - bb$

$$\begin{array}{r}
 a^2a - bb \mid a + b \\
 (a - b) \\
 aa - ab \\
 \hline
 + ab - bb \\
 (a - b) \\
 aa - bb \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Wie man
große Exem-
pel in der
Buchstaben-
rechnung die

a in aa hab ich a mal; a mal a ist aa , a dividirt;
mal $-b$ ist $-ab$, aa von aa geht auf;
 $-ab$ von keinem gleichen Product läßt
§. 34. nach Veränderung der Zeichen $+ab$.
 a in ab habe ich b mal; b mal a ist ab
und b mal $-$ ist $-bb$; aa von aa geht
auf, $-bb$ von $-bb$ geht auf. Eben so
lassen sich auch grössere Exempel dividiren;
wir wollen eines hersehen:

$$\begin{array}{r}
 aa - bb - 2ac + cc \mid a + b - c \\
 (a - b - c) \\
 aa - ab - ac
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + ab - bb - ac + cc \\
 (a - b - c)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + ab - bb - bc
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + bc - ac + cc \\
 (a - b - c) \\
 - ac + bc + cc
 \end{array}$$

0

wer sich das unmittelbar vorhergehende
Exempel und die allgemeine Regeln der
Division bekannt gemacht hat, wird das,
was man dazu auszusprechen hat, von
selbst

solche Exem- selbst hinzu sprechen können, ohne daß wir
pel kommen nöthig hätten, das weiträufliche a in aa
aber nicht habe ich a mal, u. s. w. beizusetzen. Ues
so oft vor. brigens kommen dergleichen Exempel nicht

so gar oft vor, wie wir schon gemeldet
haben. Eines wäre noch nöthig, daß
wir nemlich zeigten, wie ein einfacher
Buchstabe durch einen zusammengesetzten

Divisor, z. E. a durch $a + c$ oder b durch
Vorläufige Anzeig, wie man einfache Buchstaben durch zusam-
mengesetzte Divisores dividire;
Dividire;
ge und schöne Exempel von dieser Art in

warum man das folgende Capitel versparen. Wir
die ganze Auflösung dieser Frage hier noch nicht geben
dane.
nennen sie aber vorläufig schon nützliche
Exempel, weil sie uns den Weg zeigen,
wie man die ins unendliche fortgehende
Progressionen finden und hernach wieder
summiren könne.

Von der Di- §. 57. Endlich müssen wir auch noch
vision der lernen, wie man die Dignitäten oder Pos
Dignitäten tenzen dividire. Wir haben bey der Muls
oder Poten- tiplication von ihnen schon gehandelt,
zen. und darfen uns auf die daselbst gege
Erklärung der Potenzen berufen. Wenn
wir wissen, wie sie multiplicirt werden,
so läßt sich ihre Division bald lernen.

und zwar Eine Dignität ist z. E. a^4 , oder $aaaa$;
erstlich wie wenn ich diese durch a^3 oder aaa dividire,
eine Digni- so bekomme ich a . Dann wir wollen wirk
tät über- lich nach der allgemeinen Regel dividiren:
haupt durch

aaaa

$$\begin{array}{r} \text{aaaa} \mid a \\ (\text{aaa}) \\ \hline \text{aaaa} \\ \hline \end{array}$$

eine andere
von einerley
Benennung
wirklich di-
vidirt werde.

Ich sage, *aaa* habe ich in *aaaa* nach der Regel *a* mal; *a* mit *aaa* multiplicirt gibt *aaaa*; dieses von *aaaa* subtrahirt geht auf. Eben so ist x^5 gleich $xxxxx$, wenn ich es nun durch x^2 oder xx dividire, so bekomme ich x^3 ; dann wann man wirklich nach der Regel dividirt, so hat man

$$\begin{array}{r} xxxxx \mid xxx \\ (xx) \\ \hline xxxxx \\ \hline \end{array}$$

Hieraus läßt sich nun eine allgemeine und höchstbrauchbare Regel für die Division der Dignitäten erlernen, welche die folgende ist: Dignitäten von einerley Benennung werden durch einander dividirt, wenn man ihre Exponenten von einander subtrahirt. Demnach ist

$y^3 : y^3 = y^{3-3} = y^0$; $x^7 : x^4 = x^{7-4} = x^3$ u. s. w. Man kann die Sache auch aus der Natur der Multiplication beweisen; dann weil $x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$ so muß $x^7 = x^{4+3}$ und $x^{4+3} : x^4 = x^3$ seyn. Allein der obige Beweis, den wir zuerst gesetzt haben, fließt aus der genetischen Erklärung der Buchstabendivision überhaupt, und ist

sonders

wichtige Sätze

la.

dahero schon vollkommen deutlich und allgemein. Wir wollen noch einige Exempel geben, welche sich auf eben diese Regel gründen, unerachtet sie nicht so klar und augenscheinlich in die Sinne fallen. Man solle a^m mit a^n dividiren. Hier verfare ich nach meiner Regel und sage $a^m = a^{m-n}$. Wenn ich wüßte was m und a^n

n wäre, so könnte ich einem die Probe gleich vor die Augen hin mahlen; dann gesetzt m wäre 3 und n wäre 2; so hiesse das Exempel: $a^{3-2} = a^1$; dann a^3 ist aaa und a^2 ist aa ; folglich $\begin{array}{r} aaa \\ (aa) \end{array} | a$; aa

aber doch die Probe in allen Fällen angeht, ich mag für m und n setzen, was ich für Zahlen will; so muß auch der allgemeinste Ausdruck wahr seyn, daß nemlich $a^m = a^{m-n}$; Eben so ist $a^4 x^5 : a^2 x^3 =$
 a^2

$a^{4-2} x^{5-3} = a^2 x^2$; weil $a^4 x^5 : a^2 x^3 =$
 $\begin{array}{r} aaaa xxxxx \\ (aaxxx) \end{array} | aaxx$; folglich wird aber
 $aaaa xxxxx$

mahl, wenn ich allgemeine Ausdrücke brauche, nach der gegebenen Regel seyn $\frac{a^n x^m}{a^r x^s} = a^{n-r} x^{m-s}$, und $\frac{x^r y^s}{x^m} = x^{r-m} y^s$,

Aus

vier Rechnungsarten.

Aus gleichem Grunde, weil die Regeln gemein und bewiesen, wird auch $x = x^{1-1} = x^0$, ferner $x^2 : x^3 = x^{2-3} = x^{-1}$, so auch $x^2 = x^{2-5} = x^{-3}$, und

$$x^5$$

weil man nemlich den Exponenten des Divisors von dem Exponenten der zu dividirenden Zahl in diesem Fall nur subtrahirt, und wann man das grössere von dem kleineren subtrahirt, die Differenz negativ wird. Diese letztere Verwandlungen haben einen grossen und wahren Nutzen; man muß daher wohl darauf Achtung geben. Wir haben nun alle, wenigstens die vornehmste Ausdrücke, nahmhast gemacht, die in der Division der Potenzen vorkommen, und die man sich vorzüglich bekannt machen muß, wenn man in den algebraischen Rechnungen etwas thun will.

§. 52. Es ist noch eine Division der Potenzen zurück, welche zu wissen gleich nöthig ist. Dann ich kann nicht nur eine Potenz durch eine andere gleichnamige überhaupt dividiren; sondern es kann auch geschehen, daß ich eine Potenz oder Dignität durch diejenige Potenz wieder dividire, aus deren etlichmaliger Multiplication sie entstanden ist: z. E. a^2 entsteht, wenn ich a mit a , oder mit sich selbst multiplicire; a^4 entstehet, wenn ich die

§ 5

Pot

fey

Auflösung.

und

Beweis.

Was eine

Wurzel seye,

u. durch was

für Zeichen

die Wurzeln

ausgedruckt

werden.

Potenz a^2 mit sich selbst multiplicire, a^2 entstehet, wenn ich die Potenz a^2 dreyimal mit sich selbst multiplicire; dann a^2 ist aaa ; folglich $aaa \cdot aaa = aaaqaa$; und dieses Product noch einmal mit aaa multiplicirt gibt $aaaaaaaaa$, oder a^9 . u. s. w. Nun verlangt man zu wissen, wie man es angreifen müsse, wenn man diejenige Potenz suchen wolle, aus deren etlichmaliger Multiplication eine solche höhere Potenz entstanden ist. Die Potenz muß einenggegeben seyn; das ist, man muß einem sagen, ob man aus a^9 diejenige Potenz verlange, die 9 mal mit sich selbst multiplicirt die Potenz a^9 gebe, oder ob man diejenige verlange, die 3 mal mit sich selbst multiplicirt a^9 werde; im ersten Fall ist sie a im zwayten aber a^3 . Eine solche Größe se, welche etlichmal mit sich selbst multiplicirt eine höhere Potenz hervorbringe, heißt man eine Wurzel, und druckt sie durch das Zeichen $\sqrt{}$ aus. Die Wurzel einer Potenz, welche entstehet, wenn man die Wurzelgröße um zweymal mit sich selbst multiplicirt, heißt die Quadratwurzel, und wird blos durch $\sqrt{}$ angezeigt; wenn sie aber 3 mal mit sich selbst multiplicirt worden ist, so heißt sie die Cubicwurzel, und wird geschrieben $\sqrt[3]{}$; was weiter hinaus gehet, heißt überhaupt die Wurzel 4, 5, 6, m , n , und wird geschrieben

 $\sqrt[n]{}$

$\sqrt[4]{}, \sqrt[5]{}, \sqrt[6]{}, \sqrt[m]{}, \sqrt[n]{}$. u. s. w. Nun fragt sich, wie man eine solche gegebene Wurzel suchen müsse. Die höhere Potenzen in diesem Fall entstehen, wenn man die Exponenten mit einander multiplicirt; §. 50. folglich werden die Wurzeln wieder durch die umgekehrte Methode gefunden werden; das ist, wenn man den Exponenten der Dignität mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. Ich suche $\sqrt[3]{}$ aus a^6 , oder die Potenz, die 3 mal mit sich selbst multiplicirt, a^6 gibt; setze daher $a^6 = aaaaaa$; weil nun aa dreymal mit sich selbst multiplicirt $aaaaaa$ gibt; so ist $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, das ist $a^2 = a^{\frac{6}{3}}$; dann ich darf nur wirklich den Exponenten der Dignität 6, durch den Exponenten der Wurzel 3 dividiren, so habe ich a^2 ; ferner ist $\sqrt[2]{a^4} = a^2$; dann $a^{4 \cdot 2} = a^8$. Folglich wird $\sqrt[2]{a^8} = a^4$; hingegen $\sqrt[4]{a^8} = a^2 = a^{\frac{8}{4}}$; eben so ist $\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$; dann $x^{3 \cdot 2} = x^6$ §. 50. folglich wird die Quadratwurzel daraus seyn $x^{\frac{6}{2}} = x^{\frac{3 \cdot 2}{2}} = x^3$. Die ganze Kunst besteht also darinnen, daß man den Exponenten der Dignität durch den Exponenten der gegebenen Wurzel dividirt. Diese Regel muß man sich wohl bekannt machen; dann sie ist eine von denenjenigen, die unter allen bisherigen

Allgemeine

Regeln die

Wurzeln im

Zeichen aus

zu ziehen.

Erklärung

dieser höchst

brauchbaren

Regel.

Anwendung
auf einige
schwerere
Fälle, welche
aber sehr oft
vorkommen.

rigen Regeln in den algebraischen Rechnungen fast am häufigsten vorkommen, und den größten Nutzen haben. Man muß sich aber auch in andere Exempel fin- den können, die einem nicht mehr so klar, wie die gegebene, vor die Augen hingemaht, sondern durch Hülfe der allgemeinen Regel dem Verstand deutlich gemacht werden, wenn gleich die Einbildungskraft nicht mehr so geschäftig dabei seyn darf. Ich solle zum Exempel die Cubicwurzel aus x^3 einem sagen, so schreibe ich kraft meiner Regel $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}}$; hier ist der neue Exponent ein Bruch, den man nicht durch die nebeneinander gesetzte Buchstaben faßlich genug für die Einbildungskraft vorstellen kann; aber der Verstand, der die gegebene Regel begreift, wird dennoch nichts dagegen einwenden können. Eben so ist $\sqrt[3]{}$ aus x^1 , oder aus x in der ersten Potenz, $= x^{\frac{1}{3}}$, ferner die Quadratwurzel aus x^3 ist $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$; eine gleiche Beschaffenheit hat es mit allgemeinen Ausdrücken; dann $\sqrt[3]{}$ aus x^{nm} oder $\sqrt[3]{x^{nm}}$ ist gleich $x^{\frac{nm}{3}} = x^{\frac{n}{3}m}$; und $\sqrt[3]{x^n}$ $= x^{\frac{n}{3}}$ und $\sqrt[3]{x^{n+1}}$ ist gleich $x^{\frac{n+1}{3}}$; Wie man übrigens die Brüche der Exponenten

Ich hier und da vermindern, kleiner machen und schicklicher ausdrücken sollte, werden wir im folgenden Capitel zeigen. Den Nutzen von unserer Regel werden Die Brach-
 diejenige erst recht erfahren, welche weis- barkeit dieser
 ter kommen; ich kann daher nicht um- Regel wird
 hin, meine Leser noch einmal zu erinnern, in der Kenntniß dieser Ausdrücke sich recht noch einmal
 fest zu setzen; Leibniz und Newton haben angepriesen,
 sie zuerst gemeinnütziger gemacht, und
 sodann die größte Erfindungen dadurch erleichtert. Was die Regel selbst betrifft,
 so ist sie faßlich und deutlich genug. Nur
 muß man dasjenige nicht vergessen, was
 ich von den Kräften des Verstandes und
 der Phantasie gesagt habe. Man siehet Einige allge-
 zugleich, daß auch in andern Wissenschaften diese Anmerkung brauchbar seye. Es
 können manchmal Fälle vorkommen, merktungen,
 die einem nicht so klar in die Augen fallen; daher kommen Einwürfe, Logomachien, nichts heissende Consequentien. u.
 f. w. Sie entstehen aus dem Mißbrauch der Einbildungskraft, und aus dem Mangel der Erkenntniß allgemeiner Regeln. matik auch
 Dann wenn ich einmal die Allgemeinheit in andern
 einer Regel bewiesen habe, so müssen auch Wissenschaften
 alle Fälle, die darunter begriffen sind, nach selbiger sich richten. So ist der Satz
 des zureichenden Grundes in der Mechanik schon vom Archimedes für einen allgemeinen Satz erkannt worden. Aber in
 an-

Dann wollen wir $\frac{x}{x} = 1$, nennen x in der Potenz Nullte; oder x^0 ; und die unter $x^0 = 1$ stehende und abnehmende Potenzen ohne Brüche auszudrücken suchen; höchst wenn $1 = x^0$, so kann $\frac{1}{x}$ weder x^1 noch x^0 sein; sondern es muß kleiner werden, wie $\frac{1}{2}$ kleiner ist als 6 und als 1; wenn ich nun den Bruch vermeiden will, so weiß ich kein taugliches Zeichen, als wenn ich sage der Bruch $\frac{1}{x}$ ist x aber in der Dignität — 1, und der Bruch $\frac{1}{x^2}$ ist auch x aber in der Dignität — 2 u. s. w. Daß aber dieser Ausdruck aus den innern Gründen der Größentheorie nothwendig folge, sieht man vorläufig schon aus der §. 57. vorgetragenen und erwiesenen Methode, die Potenzen zu dividiren. Dann wenn ich x^1 durch x^2 dividire, so habe ich nach den angeführten Grundsätzen $x^{1-2} = x^{-1}$, folglich ist $\frac{1}{x}$ nach den wesentlichen Regeln der Buchstaben- Division dem Ausdruck x^{-1} vollkommen gleich. Demnach gebe es diese zwei gleiche Progressionen:

$$\begin{cases} x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-n} \\ x^1, x^2, x^1, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^n} \end{cases}$$

Auch diese Ausdrücke haben einen grossen Nutzen; indeme man z. E. für einen Bruch $\frac{1}{x^m}$ nur setzen darf x^{-m} , für $\frac{1}{x^n}$ nur

x^{-n} ,

a^{-4} , für $\frac{1}{ax^4}$ nur $a^{-1}x^{-1}$ u. s. w. wir wer-

den aber im folgenden Capitel davon han-
deln, auch zu seiner Zeit, wenn wir die
lehre von den Logarithmen vortragen,
ihre Aehnlichkeit mit diesen Ausdrücken
umständlich zeigen.

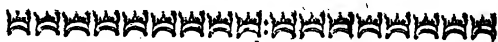
Uebung des
Wizes in
schneller Er-
findung der
Factorum
und Diviso-
rum einer
Größe;

Eige am
meisten vor-
kommende
Exempel
werden an-
geführt,

§. 60. Nunmehr haben wir alles ge-
sagt, was bey der Division zu sagen war.
Eines fügen wir noch bey. Man kann
eine nicht gemeine Fertigkeit des Wizes
und der Scharfsinnigkeit zeigen, wenn
man durch fleißiges Nachdenken und eine
gute Uebung sich in den Stand setzet, die
Factores eines Ausdrucks schnell zu fin-
den, und hernach den Ausdruck selbst,
wenn er nicht schließlich genug zur Rech-
nung wäre, damit zu verwechseln. So
ist z. E. $ax - x = (a - 1)x$; dann wenn
ich $a - 1$ mit x multiplicire, so bekomme ich
 $ax - x$; und wenn ich diesen Ausdruck
mit $a - 1$ dividire, so bekomme ich x ;
auf gleiche Weise ist $xy - y = (x - 1)y$,
und $abx - bx = bx(a - 1)$; ferner $ax + x$
 $= (a + 1)x$, u. s. w. Diese Ausdrücke,
welche einander gleich sind, kommen oft
vor, und können mit Nutzen gebrachte
werden. Eben so ist auch $aa - bb = (a - b)(a + b)$,
 $xx - yy = (x - y)(x + y)$ u.
s. w. Man kann keine besondere Regeln
davon geben, weil die Fälle so mannigfaltig
sind, und man also durch die Men-

ge

ge der Regel nur überhäuft würde. So und gelehrt, viel siehet man schon, daß eine fleißige wie man zu Übung das meiste thun müsse; indem die Divisores bald gefunden werden, wenn einer fertig man weiß, durch was für Factores die seit in dieser zu dividirende Zahl in der Multiplication entstanden ist. Diß aber lernt man, Erfindung wenn man allerhand Exempel mit einander gelangen der multiplicirt, und auf die Producte können so wohl als auf die Factores Achtung gibt. Die am häufigsten vorkommende Exempel haben wir selbst angeführet, daher wir auch in diesem Stücke unsern Lesern nicht allzuviel Mühe zu machen gesonnen waren.



III. Cap.

Von den einfachen Verhältnissen der Zahlen, und besonders von den Brüchen.

§. 61.

Eine einfache Verhältniß der Größen. Was eine bekommt man, wenn man zwei Zahlen einfache Verhältniß setzen, len mit einander vergleicht, und entweder auf ihre Differenz oder auf ihren Quotienten siehet; so können 2 und 6 mit einander verglichen werden. Dann ich kann sagen: 6 ist um 4 größer als 2, oder welches gleichgültig ist, 6 weniger 2 ist

2 ist 4, oder auch 4 ist die Differenz zwischen 2 und 6; alle diese Ausdrücke sind von einerley Bedeutung §. 28. Hernach kann ich auch sagen, 6 ist 3 mal grösser als 2, oder 2 in 6 ist 3 mal enthalten, oder wenn man sechs durch 2 dividirt, so ist der Quotient 3, oder auch 2 kann ich durch die schnelle Subtraction von 6, 3 mal subtrahiren. Auch diese Ausdrücke gelten allesamt gleichviel. §. 51. Wenn ich nun bey zwei Zahlen auf die Differenz sehe, so habe ich eine arithmetische Verhältniß; sehe ich aber auf ihren Quotienten, so bekomme ich eine geometrische Verhältniß. Diese Namen muß man sich wohl bekannt machen. Sie sind nicht nur von grossem Nutzen, wie wir zeigen werden, sondern auch allgemein. Dann ich mag zwei Zahlen denken, was ich nur für will, so werden sie allemal eine arithmetische und geometrische Verhältniß haben können. Der Grund davon ist leicht zu begreifen. Alle nur mögliche Zahlen lassen sich von einander subtrahiren, und wenn sie auch vollkommen gleich wären; dann in diesem Fall ist ihre Differenz null; z. E. $3 - 3 = 0$; sind sie aber ungleich, so ist es vorhin klar, daß sie eine wirkliche Differenz haben. Da nun alle nur mögliche Zahlen eine Differenz von einander bekommen können, so läßt sich auch bey allen Zahlen eine arithmetische Verhältniß

Ihre Eintheilung in die arithmetische und geometrische Verhältniß.

Warum alle nur mögliche Zahlen diese doppelte Verhältniß haben können?

nicht gedenken. Das ist das erste. Das zweite, daß alle nur denkbare Zahlen eine geometrische Verhältniß haben können, beweisen wir auf gleiche Art. Alle nur mögliche Zahlen lassen sich durch einander dividiren, der Quotient mag hernach ein Bruch, oder eine ganze Zahl, oder wenn man eine Zahl durch sich selbst dividirt, nur Eins seyn. S. 54. Folglich mag ich zwei Zahlen denken, was ich für will, so werde ich auch ihren Quotienten hinzudenken können. Wenn sie aber einen Quotienten haben, so können sie alle in einer geometrischen Verhältniß stehen. Das war nun das andere, das wir beweisen wollten. Eine arithmetische Verhältniß wird durch das Subtractionszeichen, eine geometrische aber durch das Zeichen der Division ausgedruckt; $a - b$ ist also eine arithmetische, hingegen $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ eine

geometrische Verhältniß; oder $6 - 2$ ist durch eine arithmetische, und $\frac{6}{2}$ oder $6 : 2$ durch eine geometrische Verhältniß ausgedruckt. Die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt eine Proportion, davon wir im folgenden Capitel reden werden.

§. 62. Die arithmetische Verhältnisse, welche man inzwischen dem Nahmen nach behalten muß, bis wir im folgenden Capitel ihre Eigenschaften erweisen, haben keinen besondern üblichen Nahmen

ben den gemeinen Rechenmeistern bekommen. Hingegen hat man die geometrische Verhältnisse, welche weit öfter vorkommen, in der gemeinen Rechenkunst anders und zwar Brüche genannt. Ein

Geometri-
sche Verhält-
nisse werden
in der gemei-
nen Arith-
metik Brü-
che genannt.

Bruch (fractio) ist also in der Arithmetik nichts anders, als eine geometrische Verhältniß oder eine Zahl, die durch eine andere dividirt wird. Wenn die Zahl, welche dividirt wird, kleiner ist als der Divisor, so heißt der Bruch ein ächter Bruch, ist sie aber dem Divisor gleich oder gar grösser als der Divisor, so heißt sie ein unächter Bruch. Z. E. $\frac{6}{12}$ ist ein ächter Bruch; hingegen $\frac{6}{2}$ oder $\frac{6}{3}$ sind unächte Brüche. Die zu dividirende Zahl sowohl

Was ächte
und unächte
Brüche
sind.

Was Zehler
und Nenner
heissen.

als der Divisor haben in der Lehre von den Brüchen andere und ganz neue Namen bekommen. Denn die zu dividirende Zahl heißt der Zehler, und der Divisor der Nenner. Also was in der Divisionslehre der Divisor ist, das ist in der Bruchlehre der Nenner. So ist z. E. in dem Bruche $\frac{3}{6}$, 3 der Zehler, (numerator), und 6 der Nenner, (denominator). Den Grund dieser Namen wollen wir zeigen, wenn wir die Art und Weise Brüche zu addiren und zu subtrahiren vortragen.

Wie man
von der Grös-
se eines
Bruchs ur-
theilen solle.

§. 63. Ehe wir aber diese Lehre abhandeln, müssen wir vorher zeigen, welche Brüche grösser oder kleiner als andere seyen, und welche einander gleich seyen.

Es

Es ist 'etwas schwer', von der Grösse der Brüche zu urtheilen; die Regel heisst zwar so: je kleiner der Quotient ist, desto grösser ist der Bruch, und je grösser der Quotient ist, desto kleiner ist der Bruch. Allein diese Regel ist für Anfänger nicht faßlich und deutlich genug, wenn man sie nicht auf eine ganz leichte Art zu beweisen sucht. Wir wollen einen Versuch davon machen. Man theile eine Linie AB in 8 allgemeine gleiche Theile:

Regel samt dem Beweis.

A 1 2 3 4 5 6 7 8 B

so wird

$$\begin{aligned} A_8 &= \frac{1}{8} \\ A_7 &= \frac{2}{7} \\ A_6 &= \frac{3}{6} \\ A_5 &= \frac{4}{5} \\ A_4 &= \frac{5}{4} \\ A_3 &= \frac{6}{3} \\ A_2 &= \frac{7}{2} \\ A_1 &= \frac{8}{1} \end{aligned}$$

Nun siehet man augenscheinlich, daß

$$A_8 > A_7 > A_6 > A_5 > A_4 \text{ u. s. w.}$$

folglich auch

$$\frac{1}{8} > \frac{2}{7} > \frac{3}{6} > \frac{4}{5} > \frac{5}{4} > \frac{6}{3} \text{ u. s. w.}$$

Dahero sich eine leichte Regel herausziehen läßt, welche also heisst: je öfter der Zehler im Nenner enthalten ist, desto kleiner ist der Bruch, wenn man ihn mit

einem andern vergleicht, dessen Zehler im Nenner nicht so oft enthalten ist. Die Linie von A bis 2 ist 2 Achttheile der ganzen Linie AB, oder $\frac{2}{8}$; diese Linie ist nun viel kleiner als die von A bis 6, welche 6 Achttheile der Linie AB in sich begreift, oder $\frac{6}{8}$ heißt; folglich muß auch der Bruch $\frac{2}{8}$ weit kleiner seyn als $\frac{6}{8}$; da nun 2 in 8 4 mal, 6 in 8 aber nur einmal und etwas wenigens darüber enthalten ist, so sieht man den Grund der angeführten Regel, von der GröÙe der Brüche zu urtheilen. Die Sache ist also leicht, wenn die Nenner gleich sind. So ist z. E.

$$\frac{3}{7} < \frac{4}{7}, \frac{4}{9} < \frac{5}{9}, \frac{1}{11} < \frac{2}{11} \text{ u. s. w.}$$

wie man von wenn aber die Nenner auch unterschieden
der GröÙe sind, so muß man die Brüche vorher unter
urtheilen sol- einerley Benennung bringen, wenn
te, wenn die man ein zuverlässiges Urtheil fällen will;
Nenner ver- oder darf man nur im Kopf geschwinde
schieden sind. dividiren und sehen wie oft der eine Zehler
in seinem Nenner, und hernach auch wie
oft der andere Zehler in dem seinigen ent-
halten seye; in welchem Falle man nach
der gegebenen Regel abermal ein sicheres
Urtheil von der GröÙe der Brüche geben
kann; z. E. $\frac{3}{8}$ und $\frac{1}{4}$ sollen nach ihrer
GröÙe beurtheilet werden; 3 in 8 ist 3
mal und noch etwas drüber enthalten, 1
in 4, aber nur 4 mal; also ist $\frac{3}{8}$ größer als
 $\frac{1}{4}$; eben so ist $\frac{2}{7}$ größer als $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ grö-
ßer

se als $\frac{1}{2}$ u. s. w. Man darf in diesen Fällen nicht jedesmal dividiren, sondern nur überhaupt durch das Anschauen der Zahlen gleichsam zu errathen suchen, welcher Zehler mehrmalen in seinem Nenner enthalten seye, wenn man nicht genau zu wissen verlangt, um wie viel ein Bruch grösser als der andere seye. Will man aber dieses wissen, so ist es am sichersten, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt; wie wir an seinem Ort zeigen werden.

§. 64. Eben hieraus läßt sich auch leicht bestimmen, welche Brüche einander gleich seyen. Ein Bruch ist dem andern gleich, wenn des einen Zehler in seinem Nenner so oft enthalten ist, als der Zehler des andern in seinem Nenner enthalten ist. So ist z. E.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24}$ u. s. w. Dann eins ist in viereu so oft enthalten als 2 in 8, und 4 in 16, und 5 in 20, und 6 in 24 u. s. w. Dann der Quotient, oder wie er auch sonst in der Bruchlehre heißt, der Exponens rationis, ist allemal 4. Man siehet den Gebrauch dieser Regel leicht ein, wenn nach geschriebener Division des Nenners durch den Zehler alles aufgeht und kein Rest übrig bleibt; wenn aber etwas übrig bleiben sollte, so ist es besser, wenn man die beide Brüche unter einerley Benennung bringt, und sodann ihre Gleichheit

deutlich einsehen lernt. Z. E. $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind einander vollkommen gleich. Den Grund davon werden wir sogleich vortragen, und wie man Brüche unter einerley Benennung bringe, umständlich zeigen.

Allgemeines Fundament: §. 65. Wenn ich einen Bruch, das ist seinen Zehler und Nenner durch eine dritte Zahl multiplicire oder dividire, so talgesetz der wird er nicht verändert, sondern so groß als vorhin, das ist, sich selber vollkommen gleich bleiben. Dieses ist das Fundamentalgesetz bey den Brüchen, welches wir jezo, wegen seines grossen Nutzens, ausführlich beweisen wollen. Hier kommt uns nun ein leichter und gemeiner Satz, den wir schon angeführt haben, sehr wohl zu statten: nemlich der jedermann bekannte Satz: Eins multiplicirt und dividirt nicht §. 39. 54. Nun ist eine Grösse durch sich selbst dividirt, allemal eins; §. 54. folglich wird auch eine solche Grösse eine andere weder multipliciren noch dividiren, das ist, durch die Multiplication und Division weder grösser noch kleiner machen. Nun solle uns der Bruch $\frac{a}{b}$ gegeben seyn, ein Bruch, welcher allen nur denkbaren Brüchen gleich seyn kann. Dann a kann alle mögliche Zahlzeichen, oder alle mögliche Zehler, und b alle nur mögliche Nenner bedeuten:

ten: für a kann ich ja 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 30, u. s. w. und für b gleichfalls 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. setzen. Folglich ist der Bruch $\frac{a}{b}$ ein allgemeiner Ausdruck für alle Brüche, und was ich von dem Bruch $\frac{a}{b}$ beweise, das habe ich von allen nur denkbaren Brüchen bewiesen. Ein Bruch ist allemal eine gewisse Grösse, darum wird $\frac{a}{b}$ auch eine Grösse seyn. Folglich wird er mit 1 dividirt oder multiplicirt weder grösser noch kleiner werden. Nun ist $\frac{m}{m}$ gleich eins, §. 54. und zwar so gut als $\frac{6}{6}$ gleich eins. Wenn ich also den Bruch $\frac{a}{b}$ mit $\frac{m}{m}$ multiplicire, so wird er noch ganz der vorige Bruch seyn, und nicht im mindesten verändert werden. Nun aber habe ich noch nicht gezeigt, wie man Brüche mit Brüchen multiplicirt, daher weiß ich auch nicht, wie der Bruch $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m}$ nach geschehener Multiplication aussehen muß. Dann wenn ich sage, man muß Zehler mit Zehler und Nenner mit Nennern multipliciren, so könnte ich einen Cirkel begehen, wenn ich hernach weiter unten die Multiplicationsregeln der Brüche aus dem gegenwärtigen noch nicht erwiesenen Fundamentalsatz

gesetz erweisen wollte. Durch die bloße Anzeige aber $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a}{b}$ habe ich noch nichts gewonnen, weil ich dadurch noch nicht in den Stand gesetzt bin, den neuen Bruch recht zu schreiben und auszusprechen. Allein es ist schon viel gewonnen, wenn man nur diese bloße Anzeige recht versteht, und weiß daß $\frac{a}{b}$ multiplicirt mit $\frac{m}{m}$ vollkommen dem vorigen und noch nicht multiplicirten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich seye. Und das haben wir bisher erwiesen. Nun wollen wir unabhängig von den Regeln der Multiplication zeigen, wie der multiplicirte Bruch aussehen müsse, und uns blos auf die in der Einleitung vorgetragene Grundsätze berufen. Der Quotient oder die GröÙe des Bruchs $\frac{a}{b}$ solle n seyn, oder $\frac{a}{b}$ solle n gleich seyn. Wenn ich nun einen neuen Bruch durch das calculiren herausbringe, dessen GröÙe auch n ist; so wird dieser neue Bruch derjenige seyn, den ich gern schreiben und aussprechen möchte; dann wenn er ein anderer Bruch wäre, so würde seine GröÙe der GröÙe des vorigen gewis nicht vollkommen gleich seyn. Ich muß aber den andern Bruch $\frac{m}{m} = 1$ in meine Rechnung mit hineinbringen,

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 139

gen, doch so, daß ich keine Rechnungsart und Operation dabei brauche, die ich aus dem bisherigen nicht schon wüßte und verstünde: ich setze also:

$\frac{a}{b} = n$ folglich ist, wenn man beiderseits mit b multiplicirt, nach §. 9. 55.

$a = bn$ Und wenn man nochmalen
 $m = m$ beiderseits mit m multiplicirt,
 $am = bnm$ §. 9.

_____ : bm endlich wenn man beiderseits mit bm dividirt; so ist

$\frac{am}{bm} = n$ Da nun Anfangs gleich gesetzt wurde

$\frac{a}{b} = n$ so ist nach dem Grundsatz: wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. §. 9.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

Folglich siehet der neue Bruch so aus, wie $\frac{am}{bm}$, weil er dem vorigen $\frac{a}{b}$ vollkommen gleich ist. Wir haben in diesem Beweis nichts angenommen, das nicht in der Einleitung und den Regeln der Division in ganzen Zahlen schon wäre erwiesen worden, zugleich aber auch ihn so deutlich gemacht, daß wir zu unsern
 sei

Lesern das gute Zutrauen haben, sie werden ihn verstehen. Eben so beweisen wir jezo auch umgekehrt, daß ein Bruch durch ein dritte Zahl dividirt sich selbst gleich bleibe. Diesen Beweis, weil er dem vorigen ganz ähnlich ist, wollen wir kürzer machen. Der zu dividirende Bruch setze $\frac{am}{bm}$ der Divisor setze m . Nun setze ich abermal die Grösse des Bruches .

$$\frac{am}{bm} = n,$$

so wird §. 9. 55.

$$am = bmn,$$

und weil

$$m = m$$

so wird, wenn man beiderseits damit dividirt

$$a = bn,$$

und wenn man nochmalen beiderseits mit b dividirt

$$\text{—————} : b$$

$$\frac{a}{b} = n$$

Da nun auch

$$\frac{am}{bm} = n$$

so wird

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

und folglich der durch m dividirte Bruch $\frac{am}{bm}$

nach der Division aussehen wie $\frac{a}{b}$. Das

ist das Hauptgesetz, nach welchem sich alle Brüche, Proportionen und Progressionen richten, nemlich daß $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ oder $a : b = ma : mb$.

§. 66.

§. 66. Hieraus siehet man nun in Rücksicht auf die Brüche, daß der Bruch unverändert bleibe, wenn man seinen Zehler und Nenner durch eine dritte Zahl multiplicire oder dividire. Z. E. der Bruch $\frac{6}{12}$ ist dem Bruch $\frac{6 \div 2}{12 \div 2}$ das ist $\frac{3}{6}$ gleich, und dieser Bruch ist eben so groß als $\frac{3 \div 3}{6 \div 3}$ kleiner oder $\frac{1}{2}$. Und das heißt man nun, aber auf eine sehr ungeschickte Weise, einen Bruch kleiner machen. Dann der Bruch wird nicht kleiner, sondern bleibt so groß, als er vorhin war, er wird nur anders und kürzer ausgedruckt, oder der Zehler und Nenner werden kleiner, nicht aber die Verhältniß oder der Bruch selbst. Wir wollen daher lieber sagen, man bringe durch diese Division einen Bruch unter eine kürzere Benennung. Wenn nun Brüche in Zahlzeichen vorkommen, so hat man keine allgemeine Regel, Brüche kürzer auszudrücken, als daß man einem sagt, er solle es mit den schicklichsten Zahlen versuchen, ob der Zehler und Nenner so dividirt werden können, daß nichts übrig bleibt. Z. E. $\frac{24}{128}$ läßt sich durch 4 aufheben; (das ist der Mahne, den man dieser Operation mit den Brüchen zu geben pflegt;) dann 4 in 24 habe ich 6 mal, und 4 in 128 habe ich 32 mal; folglich heißt der neue Bruch $\frac{6}{32}$ und dieser läßt sich durch 2 noch kürzer machen, da er dann $\frac{3}{16}$ heißt, und noch eben so groß

groß ist als $\frac{24}{128}$; weil nun $2 \cdot 4 = 8$, so läßt sich der groſſe Bruch auch mit 8 auf einmal aufheben; dann 8 in 24, ist 3 mal, und in 128, 16 mal enthalten; der Bruch $\frac{24}{128}$ kann nicht kürzer werden; dann 3 läßt sich nur mit 3 dividiren; 16 aber geht durch die Division mit 3 nicht auf, sondern läßt eins übrig. Folglich ist $\frac{3}{16}$ der kleinſte Ausdruck des Bruchs $\frac{24}{128}$.

Es ist in allewege nöthig, daß man die Brüche unter kürzere Benennung bringe, indem diese Reduction in allen Rechnungsregeln zu nützen, vornemlich in solchen, die man im gemeinen Leben braucht, keinen gehalten, welchen Nutzen hat: inzwischen halte ich es anzuzeigen, doch dafür, daß man dem ungeachtet niemand mit vielen Regeln bey dergleichen Fällen, wo die Uebung das beste thut, überhäuffen solle. Damit wir aber unsere Leser noch besser überzeugen; so wollen wir eine Regel, welche in dieser Art die leichteste und vollkommenste heißen kann, herſetzen. Es kommt darauf an, daß man wiſſe, durch was für Zahlen zwei andere Zahlen sich so dividiren laſſen, daß nach geſchehener Division nichts übrig bleibe. Nun wollen wir die Stellen der Zahlzeichen nach der Ordnung der Buchſtaben *a, b, c, d*, und ſo weiter nennen. Die letzte Claſſe, nemlich die Claſſe der Einheiten, ſolle *a* heißen, oder *a* ſolle die Einheiten, *b* die Zehner, *c* die Hund-

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 149

Hunderter, *d* die Tausender, *e* die Zehentausender, *f* die Hunderttausender, *g* die Tausendmaltausender oder Millionen und so weiter anzeigen. Folglich werden alle mögliche ganze Zahlen durch die allgemeine Formel $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f + 1000000g$ u. s. w. ausgedrückt werden. Nun dividire man diese Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. w. und merke was nach geschehener Division übrig bleibt. Läßt sich der Rest durch den Divisor noch so dividiren, daß nichts übrig bleibt, so läßt sich die ganze Zahl durch eben diesen Divisor dividiren. Bleibt aber etwas übrig, so kann man nicht dividiren. Man dividire also zuerst durch 2, so ist der Quotient $\frac{a}{2} + \frac{10}{2}b + \frac{100}{2}c + \frac{1000}{2}d$ u. s. w. Folglich bleibt allein *a* übrig, dann $10a$ lassen sich durch 2 vollkommen dividiren, so auch $100c$, und $1000d$ u. s. w. Eben so macht man es mit den übrigen Divisoren; z. E. wenn ich mit 3 dividire, so bleibt $a + b + c + d + e + f$ u. s. w. das ist, die Summe aller Zahlzeichen außer ihrem Rang betrachtet, übrig. Dann $\frac{a}{3} + \frac{10}{3}b + \frac{100}{3}c + \frac{1000}{3}d$ u. s. w. $= \frac{a}{3} + 3b + \frac{b}{3} + 33c + \frac{c}{3} + 333d + \frac{d}{3}$ u. s. w. Folglich ist dasjenige, was in der Division nicht aufgethet, und also übrig bleibt $a + b + c + d + e + f$ u. s. w. Aus dieser Rechnung wird nun folgende

folgende Tabelle erwachsen, in welcher die Divisores in der gewöhnlichen Ordnung der Zahlen fortgehen;

Divisores	Residua oder Reste.
2	a
3	$a + b + c + d + e + f + g$ u. s. w.
4	$a + 2b$
5	a
6	$a + 4b + 4c + 4d + 4e$ u. s. w.
7	$a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5f + g + 3$
8	$a + 2b + 4c$ h u. s. w.
9	$a + b + c + d + e$ u. s. w.
10	a
11	$a + 10b + c + 10d + e + 10f$ u. s. w.
	das ist
	$a - b + c - d + e - f + g - h$ u. s. w.

Hieraus lassen sich nun leicht allerhand Regeln begreifen. Dann daran wird niemand zweifeln, daß ich, wenn ich den Rest selbst noch durch die gegebene Zahl ohne weitem Rest dividiren kann, die ganze Zahl selbst ohne einen Rest zu lassen dividirt werden könne. Wenn ich 384 mit 2 dividire, so ist nach unserm allgemeinen Ausdruck diese Zahl $= 100.3 + 10.8 + 4$. Nun läßt sich $100.3 + 10.8$ welche Zahl vollkommen dividiren; wenn sich nun der Rest 4, welcher durch das 2 in der Tabell angezeigt wird, auch vollends durch 2 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl durch

durch zwey gerade dividiren. Folglich ^{ist dies} wird die erste Regel diese seyn: I. Wenn ^{dividen lassen,} sich das letzte Zahlzeichen einer gegebenen Zahl durch 2 oder 5 oder 10 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl dadurch dividiren.

II. Wenn sich die Summe aller ^{welche durch} Zahlzeichen durch drey oder neun ^{3 und 9 sich} dividiren läßt, so läßt sich die ganze ^{lassen,} Zahl dadurch dividiren.

III. Wenn das letzte Zahlzeichen zu ^{welche durch} dem mit 2 multiplicirten uneins letzten ^{4 dividirt} addirt wird, und die Summe durch ^{aufgehen,} vier dividirt gerade aufgeht, so läßt sich die ganze Zahl durch 4 dividiren.

IV. Wenn das letzte Zahlzeichen zur ^{welche durch} Summe aller vorhergehenden mit 4 ^{sechse,} multiplicirten Zahlzeichen addirt, sich durch 6 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl durch 6 dividiren.

V. Wenn ich eine Zahl mit 7 dividiren will, so wird die Regel gar zu weitläufig, daher ^{ist} am besten ist, wenn ^{Neben u. s. w.} man die Formel in der Tabell ansieht, ^{dividirt man} und nach derselben den vorkommenden ^{den Resten} Rest dividirt; geht er auf, so läßt sich die ganze Zahl dividiren. Uebrigens erhellt zugleich, daß die Division durch 7 die schwerste und unbequemlichste sey. Weitere Regeln wollen wir nicht geben; der Leser kann sie selbst aus der Tabell herausziehen. Eines merken wir bey der

R

Die

warum die Division durch 11 noch an. Wir haben
 Residua
 $a + 10b$ u. s. f. gesetzt $a + 10b + c + 10d$ u. s. w. setze gleich
 w. gleich $a - b + c - d$ u. s. w. Der Beweis das
 seven $a - b$ von gründet sich auf die mit den Sub-
 $+ c$ u. s. w. tractionenregeln verglichene Regeln der

Nutzen und
 Gebrauch
 dieser An-
 merkung.

Division in Buchstaben. Dann wenn
 ich 3. E. 8 durch 9 dividire, so ist der Quo-
 tient zwar $\frac{8}{9}$; er kann aber auch $1 - \frac{1}{9}$
 seyn; denn man dividire wirklich, und
 bilde sich ein, der Divisor sey der zu divis-
 direnden Zahl gleich, so hat man $\frac{8}{9} \begin{array}{l} (-1 \\ | 1 \end{array}$

die Probe wird die Operation klar ma-
 chen; dann 1. 9 mit dem negativen Rest
 -1 ist der zu dividirenden Zahl 8 wieder

gleich. Eben so ist $\frac{10b}{11} \begin{array}{l} (-b \\ | b \end{array}$, dann 1 1b

$-b$ ist wiederum gerade 10b; folglich
 werden, wenn man alles durch 11 noch-
 malen dividirt, die Residua in der Tas-
 belle seyn $a - b + c - d + e - f$ u. s. w.

Beurthei-

lung der ge-

gebenen Re-

geln.

Nun stellen wir es unsern Lesern frey, ob
 sie diese Regeln sich bekannt machen, oder
 lieber aus der Uebung und durch oftmalig-
 en Versuche es lernen wollen, wie ein ge-
 gebener Bruch durch eine schnelle Divi-
 sion unter eine kleinere Benennung ge-
 bracht werden müsse. Die zwei erste
 Regeln, die wir gegeben haben, sind nicht
 nur leicht zu behalten, sondern auch auf
 eine leichte Weise anzuwenden. Die

übrige

übrige aber scheinen etwas mühsamer zu seyn.

§. 67. Wir haben gezeigt, wie man die man die Brüche kürzer ausdrücke; nun erfordert die Ordnung, daß wir auch zeigen, wie man sie unter einerley Benennung bringe; dann man kann sie weder addiren noch von einander subtrahiren, es sey denn, daß sie vollkommen gleiche Nenner haben. Diese Kunst nun, Brüche unter einerley Benennung zu bringen, ist gar nicht schwer, wenn man das Fundamentalgesetz der Verhältnisse recht inne hat.

Dann wenn ich $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unter einerley Benennung bringen solle, so muß

ich nur den Bruch $\frac{a}{b}$ durch d den Nenner des andern, und den Bruch $\frac{c}{d}$

durch b den Nenner des ersten; da dann beide Brüche nicht nur einerley Nenner bekommen, sondern auch in Absicht auf ihre Größe den vorigen zwei Brüchen vollkommen gleich bleiben werden. Dann

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad \text{§. 65.}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd} \quad \text{§. 65. folglich}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}, \text{ welche beide letztere gleiche Nenner haben,}$$

R 2

Regel für
zween Brü-
che, die man
unter einer-
ley Benen-
nung brin-
gen solle.

Anwendung
der Regel.

Wie man
mehrere Brü-
che unter ei-
nerley Be-
nennung
bringt?

ben, wie man siehet. Die gemeine Re-
gel bey zween Brüchen wird demnach al-
so heißen: Man multiplicirt den Zeh-
ler und Nenner eines jeden Bruchs
durch den Nenner des andern. Oder
man multiplicirt beederseits ganz übers
Crenz, und zugleich beide Nenner nach

der Quere: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ oder in Zah-

len $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 5} = \frac{8}{15} + \frac{4}{15}$. Hat

man aber mehrere Brüche unter einerley
Benennung zu bringen, so bringt man
die obige Regel so oft an, als die Zahl
der Brüche es erfordert. Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} +$

$\frac{e}{f}$ werden unter einerley Benennung ge-
bracht, wenn man einen jeden ganzen
Bruch, das ist, seinen Zehler und Nens-
ner, in das Product der übrigen Nenner
multiplicirt: folglich wird man haben

Auflösung

$\frac{a}{b} \cdot df + \frac{c}{d} \cdot bf + \frac{e}{f} \cdot bd$, das ist, wenn man

samt dem

wirklich beederseits multiplicirt,

Beweis

$$\frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{dbf} + \frac{ebd}{bdf} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f},$$

oder in Zahlen

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{8}{90} + \frac{8}{90} + \frac{2}{90} = \frac{18}{90}$
Das ist nun die ganze
Kunst, Brüche unter einerley Benen-
nung zu bringen. Sie gründet sich auf
das

Das allgemeine Gesetz, daß ein durch eine dritte unbestimmte Zahl multiplicirter Bruch weder vermindert noch vermehrt werde, sondern einerley bleibe. Nun darf man in dem gegenwärtigen Fall nur eine solche dritte Zahl wählen, welche durch ihre Multiplication alle Nenner gleich macht, das ist, eine Zahl, deren Factores die einseitige Nenner sind. Folglich wird die allgemeine Regel diese seyn: Man multiplicire alle Nenner der Brüche miteinander, das Product wird der gemeinschaftliche Nenner werden. Hernach multiplicire man einen jeden Zehler nach dem andern in das Product aller übrigen Nenner, nur in seinen eigenen Nenner nicht; das Product wird der auf den gemeinschaftlichen Nenner sich beziehende Zehler seyn. Z. E. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5}$ sollen unter einerley Benennung gebracht werden. Der gemeinschaftliche Nenner ist

$$= 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

der erste Zehler $= 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

der zweite $= 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$

der dritte $= 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5$

der vierte $= 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3$

Demnach heißen die reducirte Brüche selbst:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} \\ = \frac{30}{150} + \frac{60}{150} + \frac{80}{150} + \frac{48}{150} = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}; \text{ dieses ist die gewöhnliche}$$

R 3

ste

Nutzbarkeit
der gegebenen
Regel.

ste Art, Brüche unter einerley Benennung zu bringen. Wir halten sie auch für die vortheilhafteste und bequemste Art; danu wer fertig multipliciren kann, wird bald damit zurechte kommen, und keine andere oft blos eingebildete Hülfsmittel, Zeit und Mühe zu sparen, nöthig haben.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 68. Nunmehr wird man die Regel Brüche zu addiren und zu subtrahiren bald verstehen. Man begreift leicht, daß sie weder addirt noch subtrahirt werden können, wenn sie nicht einerley Nenner haben. Wenn ich sechs Species Gulden und drey Species Ducaten nicht zusammen addiren und auch nicht von einander subtrahiren kann, es seye dann, daß ich beeden Geldsorten einen gemeinschaftlichen und gleichen Nahmen gebe, so muß ich auch bey dem addiren und subtrahiren der Brüche auf gleiche Nenner bedacht seyn. Wie wir sie nun finden sollen, haben wir §. 67. gezeigt. Sind aber die gleiche Benennungen einmal gefunden, so darf

Warum man man nur die Zehler zusammen addiren bey gleichen oder von einander subtrahiren. Der gezeigtesten nur meiste Idiot weiß dieses. Denn wenn die Zehler ein Bauersmann zu $\frac{2}{3}$ Tuch noch $\frac{1}{4}$ aus addiren und dem Laden lauft; so sagt er, er habe jeko von einander $\frac{3}{4}$ benammen, und wenn ein Lehrling von subtrahiren einem Rest, der nur noch $\frac{1}{2}$ hält, $\frac{1}{4}$ verdröfe. lauft, so weiß er, daß er noch $\frac{2}{4}$ übrig habe.

habe. Folglich addiret und subtrahiret
 man nur die Zehler; wir wollen daher
 diese leichte Sache nicht ohne Noth weils
 häufig vortragen, und zum Beschluß nur
 die einige noch melden, daß die Summe,
 wenn sie ein unächter Bruch würde, in
 ganze Zahlen durch die Division verwan-
 delt werde; bleibt aber nach geschעה-
 Division noch ein wahrer Bruch übrig,
 so wird er der Summe angehängt, und
 nach Befinden der Umstände auch kürzer
 ausgedrückt. Z. E. $\frac{4}{7} + \frac{2}{10} + \frac{3}{4}$; hier
 bringe ich die Brüche zuerst unter gleiche
 Benennung; da sie dann heißen werden
 $\frac{4 \cdot 10 \cdot 4}{7 \cdot 10 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 10 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 10 \cdot 4}{1 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{160}{280} + \frac{160}{280} + \frac{120}{280}$
 $+ \frac{120}{280}$, wenn ich nun die Zehler addire,
 so ist die Summe ein unächter Bruch
 $= \frac{160 + 120 + 120}{280} = \frac{400}{280}$, in diesem Bruch
 läßt sich der Zehler 400, durch den Nens-
 ner 280 wirklich dividiren; da dann her-
 aus kommt $2 \frac{20}{280}$, den angehängten
 wahren Bruch $\frac{20}{280}$ drucke ich durch die
 Division mit 10 kürzer aus, und bekom-
 me $\frac{2}{28}$; folglich heißt die ganze Summe
 $2 \frac{2}{28}$ oder $2 + \frac{2}{28}$; eben so geht es bei der
 Subtraction; man solle von $\frac{1}{4}$ subtrahire-
 ren $\frac{1}{7}$; die Brüche werden zuerst unter ei-
 nerley Benennung gebracht S. 67. und
 heißt folglich der Rest $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{7}{28} - \frac{4}{28} = \frac{3}{28}$.
 Dies ist alles, was man von
 der Addition und Subtraction der Brü-

Von der Ab- che zu wissen nöthig hat. Will man die
 dition und Operation in genannten Zahlen verrich-
 Subtraction ten, so setzet man dem Bruch nur am
 der Brüche Ende die Münzsorten, Gewichter,
 in genannten Maasse u. s. w. bey. Z. E. $\frac{3}{4}$ fl. — $\frac{1}{2}$ fl. =
 Zahlen, $\frac{1}{2}$ fl. dann wie man durch einen kürzern
 und in der Ausdruck die Gulden zu Kreuzer u. s. w.
 Buchstaben: mache, können wir gegenwärtig noch nicht
 rechnung. zeigen, weil die Regel davon auf die
 Natur der Proportionen sich gründet,
 welche erst im folgenden Capitel vorgetra-
 gen werden. Die Addition und Sub-
 traction der Brüche in Buchstaben ist
 ebenfalls mit zwey Worten noch gesagt.
 Man addirt oder subtrahirt die Zehler,
 und setz unter die Summe oder die Difa-
 ferenz den gemeinschaftlichen Nenner; so
 ist, nach geschעהner Reduction unter ei-
 nerley Benennung

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Kommen auch Fälle
 vor, in welchen man plus und minus zu
 addiren oder von einander zu subtrahiren
 hat, so gehet alles nach den allgemeinen
 Additions- und Subtractionregeln, die
 wir §. 26. 34. erkläret haben.

§. 69. Wie man Brüche addiren und
 subtrahiren kann, so kann man sie auch
 mit einander multipliciren und dividiren.
 Bey der Multiplication und Division der
 Brü-

Brüche hat man aber diesen Vortheil, daß man sie nicht vorher unter einerley Benennung zu bringen genöthiget ist. Wir wollen zuerst von der Multiplication handeln. Die Regel davon ist allgemein, kurz und faßlich, aber etwas schwer zu beweisen. Sie heißt also: Man multiplicirt Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern; der daraus entstehende neue Bruch ist das Product der multiplicirten Brüche. Den sonst schwer scheinenden Beweis von dieser kurzen Regel wollen wir so leicht machen, als es nur möglich ist. Man muß aber die von uns umständlich schon vorgetragene Buchstabenrechnung im Kopf haben, wenn man ihn fassen will. Man solle den Bruch $\frac{a}{b}$, welcher alle mögliche Brüche vorstellt, multipliciren durch $\frac{c}{d}$, welcher ebenfalls der allgemeine Ausdruck für alle Brüche seyn kann. Nun wollen wir den Wehr des Bruchs $\frac{a}{b}$ mit dem Buchstaben m , und den Wehr des Bruchs $\frac{c}{d}$ mit dem Buchstaben n bezeichnen. Folglich wird, wenn man die mathematische Sprache und ihre Grundsätze in der Einleitung zu Rathe ziehet, nachstehende

Rech:

Von der
Multiplication der Brüche.

Warum man
nur die Zehler mit Zehlern, und
Nenner mit Nennern
multipliciren mußte.

Rechnung niemand unverständlich seyn

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} \frac{a}{b} = m & \frac{c}{d} = n & \\ \hline & .b & .d \\ a = bm & c = dn & \\ c = dn & & \\ \hline ac = bdmn & & \\ \hline & : bd & \\ \hline \frac{ac}{bd} = mn. & & \end{array}$$

Hieraus siehet man, daß das Product der Wehrte der zween gegebenen Brüche, nemlich mn gleich seye dem Ausdruck $\frac{ac}{bd}$;

dieser Ausdruck aber ist nichts anders als $\frac{a.c}{b.d}$; folglich werden Brüche miteinander

multiplirt, wenn man ihre Zähler und Nenner nach der gegebenen Regel, miteinander multiplirt. In wirklichen

Anwendung
der Regel
auf besonde-
re Fälle.

Zahlen ist also das Product aus $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{3}$ $= \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; das Product $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$ u. s. w. Man siehet aber bey wirk-

warum durch
die Multipli-
cation der

lichen Zahlen leicht, daß der multiplicirte Bruch kleiner werde als seine Factores waren. Dann $\frac{1}{2}$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$ und auch kleiner als $\frac{1}{4}$. Allein die Ursache ist wohl begreiflich. Dann wenn ich einen Bruch mit einem wahren Bruch multiplicire, so nehme ich ihn nicht etlichmal ganz, sondern

dem ein halbmal, ein viertelmal, u. s. w. Brüche das
 folglich muß das Product kleiner werden. Product klei-
 Man kann es auch aus gemeinen Exem- ner werde,
 peln lernen. Wenn ein Bauersmann die als die Factor-
 helfte von einer halben Ehle, oder eine res waren.
 halbe Ehle nur halben kaufen will oder
 nöthig hat, so weiß er wohl, daß er nur
 eine viertels Ehle bekommt oder braucht;
 folglich, daß die Helfte einer halben Eh-
 le, oder eine halbe Ehle ein halbmal ge-
 nommen, das ist, das Product zweyer
 Brüche, kleiner seye, als der noch nicht
 multiplicirte Bruch der halben Ehle; wenn
 er schon die hier genannte Kunstworte nicht
 zugleich mit hinzudenket. Dieses Exem- Uebereins-
 pel ist ein Beweis, daß es nicht nur ei- stimmung
 ne natürliche Mathematik gebe, sondern der natürli-
 auch, daß die künstliche Mathematik von chen und
 der natürlichen eben so wenig dem Wes künstlichen
 sen nach unterschieden seye, als die künst- Mathematik,
 liche Logik von der natürlichen unterschies-
 den ist.

§. 70. Bey der Multiplication der Wie man:
 Brüche ist nur ein Fall besonders noch Brüche mit
 zu merken übrig. Es kann geschehen, daß ganzen Zah-
 man ganze Zahlen und Brüche miteinander multipli-
 ciret. Nun fragt man, ob len multipli-
 man in diesem Fall die ganze Zahl mit cire,
 dem Zehler oder mit dem Nenner des
 Bruchs, oder mit beeden zugleich multi-
 pliciren müsse? die Antwort ist leicht,
 wenn man weiß, was eine ganze Zahl
 ist,

ist, oder wie man sie ansehen könne. Eine ganze Zahl ist eine gewisse Menge von Einheiten; folglich hat sie Eins zu ihrem Nenner. Ich darf also eine jede ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner Eins ist; dann Eins dividirt nicht, und die Zahl $\frac{6}{1}$ wird der Zahl 6 vollkommen gleich seyn. Durch diese Anmerkung kann ich nun den vorgegebenen Fall auf die allgemeine Multiplicationsregel der Brüche reduciren, und sagen $6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{18}{4} = 4 \frac{2}{4} = 4 \frac{1}{2}$. Damit ich aber nicht unnöthige Mühe habe, so kann ich, weil ich sehe, daß nur der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, und eins den Nenner weiter nicht multiplicirt §. 39. folgende Regel festsetzen: Wenn man Brüche mit ganzen Zahlen multiplicirt, so multiplicirt man nur den Zehler mit der ganzen Zahl. Weil nun überdas, wie leicht zu erachten ist, in diesem Fall das Product größer wird, als der noch nicht multiplicirte Bruch war, so gibt es einen unächten Bruch, den man durch die wirkliche Division in ganze Zahlen verwandeln, und ihnen, wenn ein wahrer Bruch noch übrig bleibt, solchen anhängen muß. Die Multiplication der genannten Zahlen macht hier keinen Unterschied. Was endlich die Buchstaben betrifft, so haben wir aus dem Beweis der

und warum
man die ganze Zahl nur
mit dem Zehler des
Bruchs multipliciren
dürfte.

Von der
Multiplication
des
Zehlers in
genannten

gen muß. Die Multiplication der genannten Zahlen macht hier keinen Unterschied. Was endlich die Buchstaben betrifft, so haben wir aus dem Beweis der
Haupts

hauptregel die Art ihrer Multiplication Zahlen und zugleich gesehen. Sollte man aber plus ^{in der Buch-} haben rech- mit minus oder minus mit minus in Brü- nung. chen multipliciren, so richtet sich die Operation abermalen nach den allgemeinen Regeln der Multiplication in ganzen Zahlen, davon wir §. 42. 55. gehandelt haben.

§. 71. Man kann auch Brüche durch ^{Von der Di-} Brüche dividiren. So leicht und kurz ^{vision der} Brüche. nun abermal die Divisionsregel hier ist, so schwer pfleget manchen der Beweis davon zu fallen. Die Regel selbst ist die folgende: Wenn Brüche einander dividiren, so wird nur der Divisor, oder ^{Allgemeins} der dividirende Bruch, umgekehrt, Regel, und hernach die ganze Operation in eine Multiplication verwandelt. Wir wollen den Beweis nach eben demjenigen Sätzen vortragen, nach welchen wir den Beweis der Multiplication eingerichtet haben, folglich ihn wiederum so leicht machen, als nur immer möglich ist. Es seyen uns zweien Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gege- ^{samt ihrem} Beweis.

ben; der letztere nemlich $\frac{c}{d}$ solle der Divisor des erstern $\frac{a}{b}$ seyn. Nun fragt man, wie wird der Quotient von der bloß an-
ge-

gezeigten Division $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ aussehen? Wie

wollen ihn durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ ausdrücken,

dann er mag eine ganze oder gebro-

chene Zahl seyn, so wird der Ausdruck $\frac{m}{n}$

sich auf ihn schicken. Im erstern Fall ist eben n hernach eins. Unser Satz ist also richtig; es seye also:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{cm}{dn}$$

$$\frac{adn}{b} = cm$$

$$\frac{adn}{b} = cm$$

$$\frac{adn}{b} = cm$$

$$adn = bcm$$

$$ad = \frac{bcm}{n}$$

$$ad = \frac{bcm}{n} \text{ oder}$$

$$ad = bc \cdot \frac{m}{n}$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$$

Da

Da nun $\frac{m}{n}$ der Quotient ist, und dieser

Quotient dem Bruch $\frac{ad}{bc}$ gleich gefunden

worden, so sehen wir, wie der Bruch

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ nach geschehener Division aussehet,

dann er ist $= \frac{ad}{bc}$; oder $\frac{a.d}{b.c} = \frac{ad}{bc}$; §. 69.

weil also $\frac{d}{c}$ nur der umgekehrte Divisor ist,

so begreift man den Grund der Regel,

welche uns lehret, man solle den Divisor umkehren und hernach multipliciren.

In wirklichen Zahlzeichen ist also die Division nicht schwer: Man dividire $\frac{6}{10}$ durch $\frac{2}{5}$ so wird der Quotient seyn $\frac{6}{10} : \frac{2}{5} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ oder $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ nach §. 66. Eben

so ist der Quotient von $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ u. s. w. Man siehet aber auch hieraus, daß bey der Division der Brüche durch Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Die Ursach ist nicht schwer zu begreifen; Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient größer werde als die zu dividirende Zahl. Im gemeinen Leben versteht man ja eben, wenn man sagt $\frac{1}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ gibt den Quotienten 2; man muß sich nur anders ausdrücken und keine Kunstwörter gebrauchen. Dann wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{1}{2}$ Fuß größer als $\frac{1}{4}$.

so wird ein Kind antworten und sagen können: drey mal; oder wenn ich frage, wie oft ist ein Viertel in drey Vierteln enthalten, so sagt man drey mal. Diese Frage aber heißt in den Kunstwörtern nichts anders, als: wie viel kommt heraus oder was ist der Quotient, wenn ich $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{4}$ dividire. Dann wenn ich wirklich dividire, so heißt der Quotient $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = 3$. Der allgemeine Grund, warum die Quotienten grösser werden, ist also die in der Natur der Brüche gegründete Anmerkung, daß ein Bruch dem andern nicht nur ein halb, ein drittelmal, u. s. w. sondern auch etlich ganze mal in sich enthalten können. Bey den Brüchen findet sich also in Rücksicht auf die ganze Zahlen gerade das Gegentheil von dem, was im 2. Capitel erwiesen worden ist. Nämlich die Multiplication verkleinert den Bruch, die Division aber vergrößert ihn; und zwar beedes aus sichern Gründen, welche den in dem zweyten Capitel von ganzen Zahlen angeführten Beweisen nicht widersprechen.

Wie man §. 72. Wenn man Brüche mit ganzen Zahlen dividirt, so bedient man sich eben des Vortheils, den wir bey der durch ganze Multiplication genannt haben. Man siehet nemlich den Divisor als einen Bruch an, dessen Nenner eins ist, lehret ihn her,

einfachen Verhältn. u. Brüchen 161

hernach um , und multiplicirt nach der and ganz
 Regel §. 70. 1. E. $\frac{1}{4} : 6 = \frac{1}{4} : \frac{6}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$, Zahlen wie
 $= \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$. Um nun die Rech-
 nung kürzer zu machen weil eins weder ^{darum} durch
 multiplicirt noch dividirt, so gibt man die ^{Brüche divi-}
 Regel: Man solle den Divisor, wenn
 er eine ganze Zahl ist, bloß in den ^{divi-}
 Nenner des zu dividirenden Bruchs
 multipliciren; der neue Bruch wird der
 Quotient seyn. 3. E. $\frac{1}{4} : 8 = \frac{1}{4} : \frac{8}{1} = \frac{1}{4 \cdot 8}$
 u. s. w. Ist aber die zu dividirende Zahl
 eine ganze Zahl, und der Divisor ein
 Bruch, so wird eben der Divisor umge-
 kehrt und weil die zu dividirende Zahl
 auch einem Bruch gleichet, dessen Nenner
 eins ist, die Multiplication nach der Re-
 gel verächtet. §. 70. 3. E. 6 sollen durch
 $\frac{1}{4}$ dividirt werden; das ist, $\frac{6}{1} : \frac{1}{4} = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 1}$
 $= \frac{6 \cdot 4}{1} = 24$. Eben so ist $8 : \frac{1}{4} = \frac{8 \cdot 4}{1 \cdot 1}$
 $= \frac{8 \cdot 4}{1} = 32$; in Buchstaben ist

also die Division folgende: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1}$ Von der Di-
 vision der
 Brüche in
 Buchstaben
 a und genann-
 ten Zahlen.
 $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$; und $c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{1 \cdot a}$
 $= \frac{bc}{a}$. Sollte minus mit plus oder mi-

nus mit minus dividirt werden, so richtet
 man sich nach den allgemeinen Divisions-
 Regeln E. II, §. 55. Ein gleiches müß-
 sen wir von der Division in genannten
 Zahlen sagen.

Wie man
einfache
Größen
durch zusam-
mengesezte
dividire, oder
von der Ver-
wandlung
der Brüche
in unendli-
che Ketten
oder Pro-
gressionen.

§. 73. Es ist nur noch übrig, daß wir nach unserem Verspruch zeigen, wie man eine einfache GröÙe durch eine zusammen-
gesezte dividirt, und solche nicht nur an-
zeigt, sondern wirklich dividirt, oder wie
man einen wahren Bruch, das ist, den
Zehler durch den Nenner wirklich dividirt
und den Quotienten in eine unendli-
che Kette verwandeln könne. Es sey die
zu dividirende Zahl a , und der Divisor
 $b + c$; folglich der Bruch $\frac{a}{b+c}$; nun di-
vidire man wirklich:

$$(b+c) \overline{) \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb} \text{ u. s. w.}}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2}$$

$$- \frac{ac}{b^2}$$

$$(b+c) \overline{) \frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb}}$$

$$+ \frac{acc}{bb}$$

$$(b+c) \overline{) \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb}}$$

$$- \frac{accc}{bbb}$$

$$(b+c) \overline{) \frac{accc}{bbb} \text{ u. s. w.}}$$

Dann

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 163

Dann wenn ich wirklich dividire, so sage ich b in a ist enthalten $\frac{a}{b}$ mal; $\frac{a}{b}$ multiplizirt in $b + c$ ist $\frac{ab}{b} + \frac{ac}{b}$ das ist, $a + \frac{ac}{b}$ (§. 35.) a von a geht auf, bleibt also $-\frac{ac}{b}$, weil $+$ $\frac{ac}{b}$ von nichts subtrahirt im Reste gibt $-\frac{ac}{b}$; §. 55. diese übrig gebliebene Grösse dividire ich abermal mit meinem Divisor $b + c$, und sage b in $-\frac{ac}{b}$ ist enthalten $-\frac{ac}{bb}$ mal, oder gibt den Bruch $-\frac{ac}{bb}$; Nun multiplicire ich den neuen Quotienten mit dem Divisor, und sage $-\frac{ac}{bb} \cdot b + c$ gibt $-\frac{abc}{bb} - \frac{acc}{bb} = -\frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb}$; $-\frac{ac}{b}$ von $-\frac{ac}{b}$ geht auf; $-\frac{acc}{bb}$ von nichts abgezogen läßt $+\frac{acc}{bb}$; §. 55. diesen Rest dividire ich abermal durch $b + c$; und sage b in $+\frac{acc}{bb}$ gibt den Bruch $+\frac{acc}{bbb}$, welcher der neue Quotient ist; dieser Quotient wird wiederum

§ 2 in

164 Arithm. III. Cap. Von den

in den Divisor $b+c$ nach den allgemeinen Divisions-Regeln multiplicirt, und gibt das Product $\frac{abcc}{bbb} + \frac{accc}{bbb} = \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb}$;

$\frac{acc}{bb}$ von $\frac{acc}{bb}$ geht auf, und $\frac{accc}{bbb}$ von nichts

subtrahirt, läßt den Rest $-\frac{accc}{bbb}$; diesen

dividire ich wieder, und setze die Operation bis ins unendliche fort. Es ist aber nicht nöthig, daß ich so viel Mühe habe. Dann ich darf nur den Quotienten betrachten, so sehe ich schon, nach welchem Gesetze die Progression fortgehet; Er

heißt $\frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb}$ u. s. w. oder

Warum man die Division nur auf 4 bis 6 Glieder fortsetzen dürfte, und wie man darnach die Regel der Progression für den könne;

kürzer $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4}$ u. s. w. folg;

lich wechseln die Zeichen mit einander ab, die Nenner sind alle b , und steigen so in den Dignitäten, daß ihre Exponenten die in der Ordnung fortgehende natürliche Zahlzeichen sind; die Zeichen sind alle multiplicirt in die von Null anfangende und sodann in natürlicher Ordnung fortgehende Dignitäten von c . Demnach

wird das folgende Glied heißen $+\frac{ac^4}{b^5}$

und, nach diesem wird kommen $-\frac{ac^5}{b^6}$ u.

s. w.

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 165

f. w. Wenn nun $a = 1$, $c = 1$, und b

$$= 2, \text{ so ist } \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} -$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ u. f. w. ist aber auch $b = 1$,

$$\text{so ist } \frac{a}{b+c} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1$$

$- 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. f. w. Dann

man darf nur die Reihe $\frac{a}{b+c}$ setzen: so

kommt heraus

$$\left\{ \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ u. f. w.} \right.$$

$$\left\{ \frac{1}{1} - \frac{1 \cdot 1}{1^2} + \frac{1 \cdot 1^2}{1^3} - \frac{1 \cdot 1^3}{1^4} \text{ u. f. w.} \right.$$

Nun aber dividirt und multiplicirt eins nicht, und eins ist in der zwanzigsten Dignität nicht grösser als in der ersten, das ist, Eins zwanzigmal mit sich selbst multiplicirt oder 1^{20} ist eben eins. Folg-

lich wird die zweite Reihe heißen $\frac{1}{1+1}$

$$= \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

u. f. w. Guido Grandus hat aus die-

ser Reihe beweisen wollen, daß unendlich

viele Nullen in der Summe $\frac{1}{2}$ machen.

Der ganze Fehler aber bestunde darinnen,

daß er diese unendliche Reihe Zahlen wie

endliche Zahlen behandelt, und geglaubt

hat, sie seye entweder gleich oder ungleich habe.

(numerus par vel impar). Ist sie gleich,

2 3

Was der Bruch $\frac{1}{2}$ für eine Progression gebe.

Wird aufgezeigt, was man bei dem unendlichen Progressio nen zu be merken und zu ver hüten

so

so ist ihre Summe, weil allemal ein gleiches Paar $1 - 1 = 0$, eine Summe von lauter Nullen; ist sie aber ungleich, so gibt es allemal einen Ueberschuß entweder von -1 oder $+1$; folglich wäre $\frac{1}{2}$ entweder -1 oder $+1$. Das aber ist noch widersinnischer als das erste, daß $\frac{1}{2}$ eine unendliche Menge von Nullen seye. Die Antwort ist leicht; was unendlich ist, das ist weder eine gleiche noch ungleiche, sondern eine unendliche Zahl. Man muß also in diesem Fall den Rest, welcher immer $\frac{1}{2}$ bleibt, zur Summe, wenn sie auch unendlich wäre, noch addiren, oder diese

Wie der Divisor beschaffen seye, wenn die Quotienten oder die Glieder der Progression in ihren Zeichen nicht abwechseln;

Reihe gar für unbrauchbar ansehen. Wir werden aber von dergleichen Reihen im folgenden Capitel handeln. Uebrigens merken wir nur dieß Anige noch an, daß die Zeichen im Quotienten nicht abwechseln, wenn man a durch $b - c$ dividirt; dann in diesem Fall, wenn man wirklich dividirt, bekommt man

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ u. s. w.}$$

Wir wollen das Exempel nicht ausführlich hersehen; wer das obige sich bekannt gemacht hat, wird dieses leicht von selbst und ohne Mühe durch die wirkliche Division finden können. Eines melden wir noch; wenn einer wissen wollte, wie groß eins in Brüchen wäre, so darf er nur setzen

wie Eins in eine unendliche Reihe von Brüchen

1. $a = 1, b = 2, c = 1$. Da er dann verwandelt werden könnte, und wie
 haben wird $\frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ne, und wie
 $+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ u. s. w. Und wollte die Summe
 er wissen, wie groß eine unendliche Summe von unend-
 lich viel Ein-
 me von Einsen wäre, so darf er nur auch fern ausge-
 drückt werde.
 $b = 1$ machen, $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1$
 $+ 1 + 1 + 1$ u. s. w. Folglich wäre eins
 durch Nullen getheilt unendlich; dann
 eins ist wirklich unendlich mal größer als
 nichts. Doch genug hiervon. Im fol-
 genden Capitel finden diese Rechnungen
 erst ihren eigenen Platz, woselbst wir zu-
 gleich die hier einfallende Schwierigkeiten
 auflösen werden.

§. 74. Nunmehr könnten wir dieses Capitel beschließen, wenn wir nicht in der Materie von den Dignitäten gehört hätten, daß auch die Exponenten Brüche haben; weil man nun die Dignitäten addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren kann, so ist es in allewege nöthig, daß wir zeigen, wie diese Operationen verrichtet werden, wenn die Exponenten der Dignitäten Brüche sind; z. E. wie man $x^{\frac{1}{2}}$ zu $x^{\frac{1}{2}}$ addire, oder davon subtrahire, ferner wie man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicire oder dividire u. s. w. Die ganze Kunst wird auch hier auf die allgemeine Regeln, die Brüche zu behandeln, ankommen. Bei der Addition und Subtraction bringt man

man sie zuerst unter einerley Benennung, ehe man wirklich addirt oder subtrahirt. Diese Regel muß also auch bey den Exponenten, wenn sie Brüche sind, in ihrer Art statt finden. Folglich wird $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$

was man da $= x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^4}$ sehn. Hier bey beson- hat man sich nun wohl in Acht zu nehmen, daß man die Regel nicht zu weit ders zu besch, ausdehnt, und den Schluß macht, die achten habe, Summe von $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$ seye folglich =

$x^{\frac{3+4}{6}} = x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$. Das wäre ein Hauptfehler wider die Buchstabenrechnung und wider diejenige Regeln, die wir §. 56. 57. vorgetragen und erwiesen haben. Durch die Addition der Exponenten werden ja die Dignitäten mit einander multiplicirt; folglich wäre der Fehler so groß, als groß derjenige ist, wann man, was addirt werden soll, mit einander multiplicirt. Wie nun ein beträchtlicher Unterschied zwischen $x^2 + x^2$, und zwischen $x^2 + 2$ oder x^4 ist; so ist nicht weniger ein gleich großer Unterschied zwischen $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$ und zwischen $x^{\frac{2+2}{6}}$ oder $x^{\frac{4}{6}}$.

Darauf hat man nun sorgfältig Achtung zu geben; nicht als ob es eine Ausnahme der Regel wäre, sondern weil dieser Umstand ausdrücklich in der Regel enthalten ist. Man siehet hieraus, wie bestimmt die

die Mathematik sene, und wie accurat sie und wie accurat einen
 einen mache. Die Regel heißt: Wenn man die Exponenten addirt, so werden die Mathematik
 die Dignitäten multiplicirt; folglich darf ich keine Exponenten, auch nicht einmal die Anwendung ihrer
 in Brüchen addiren, wenn man verlangt, Regeln was
 daß ich Dignitäten addiren solle. Dann

unerachtet die Regel der Brüche auch allgemein ist, und bey der Addition der
 Exempeln nach geschehener Reduction mich die Zehler addiren heißt, so sind ja in den
 vorgegebenen Exempeln die Brüche keine leere Brüche, sondern zugleich Exponenten
 der Dignitäten; folglich kann ich die Additionsregeln der Brüche hier nicht ganz
 gebrauchen, wenn ich nicht achtlos handeln, und die Regeln der Aufmerksamkeit verletzen will. Was aber die Reduc-
 tion unter einerley Benennung betrifft, so findet sich bey den Dignitäten kein Um-
 stand, der die Anwendung des allgemeinen Fundamentalgesetzes aller geometris-
 schen Verhältnisse nicht gestatten sollte.

Also wird die Potenz $a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2}} = a^{\frac{2}{8}}$,
 die Potenz $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4}} = x^{\frac{4}{12}}$ u. s. w.

folglich auch allgemein: $x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{nr}{ns}}$, und

$x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{nr}{ns}}$ u. s. w. daher die Summe von

$$x^{\frac{m}{n}} + x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{ms}{ns}} + x^{\frac{nr}{ns}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{x^m} + \sqrt[n]{x^r}$$

\sqrt{x} ; und ihre Differenz $x^{\frac{ms}{nr}} - x^{\frac{nr}{ms}}$ oder
 $\sqrt{x} - \sqrt{x}$; nicht aber $x^{\frac{ms}{nr}}$, dann
das wäre der Quotient von $x^{\frac{m}{n}}$ dividirt

durch $x^{\frac{r}{s}}$, wie wir nun gleich hören wer-
den. Man siehet hieraus, wie man die
Dignitäten unter schicklichere Ausdrücke
bringen könne. So ist z. E. $x^m - 1 =$
 $x^{\frac{mn}{n}} = \sqrt[n]{x^{mn}}$; ferner $x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{mn}}$

Wie man $= \sqrt[n]{x^n}$ u. s. w. welche Ausdrücke einem
Dignitäten , öfters in Gleichungen mit andern Potens-
den Expo-
nenten Brü-
che sind, mit^{tenzen} , deren Exponenten Brüche sind,
einander^{geht es nach der allgemeinen Regel §. 57.}
multiplicire^{nemlich die Exponenten werden bloß ad-}
und dividire.^{dirt. Weil man sie aber nicht addiren}
man zuerst gleiche Nenner für sie nach der
allgemeinen Regel §. 67. erfinden. So

$$\begin{aligned}
 \text{ist } x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} &= x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2+4}{6}} = \sqrt[6]{x^{3+4}} \\
 &= \sqrt[6]{x^7} ; \text{ und } x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{ms}{ns}} \cdot x^{\frac{nr}{ns}} = \\
 x^{\frac{ms+nr}{ns}} &= \sqrt[ns]{x^{ms+nr}} ; \text{ ferner } x^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{1}{n}} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 171

$x^{\frac{-1+1}{m}} = x^{\frac{0}{m}} = x^0 = 1$. Man darf nur die Probe in Zahlen machen, so wird man die Wahrheit des Ausdrucks leicht erfahren. Es setze z. E. $x=4$, $m=2$.

so wird seyn $x^{\frac{-1}{2}} = 4^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{4}^{-1} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}}$

und $x^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4}$ nun ist $\sqrt[2]{4} = 2$,

und $\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; und $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, wie wir oben in der allgemeinen Rechnung gefunden. Will man Dignitäten, deren Exponenten Brüche sind, dividiren, so wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten der zu dividirenden Dignität

subtrahirt, z. E. $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2-1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{x}$; sollten die Nenner der Exponenten ungleich seyn, so werden sie vorher unter einerley Benennung gebracht, und sodann nach der Regel die Zehler subtrahirt.

z. E. $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12}} : a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{8-3}{12}} =$

$a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$; diese Operation richtet sich Probe und abermal bloß nach den Divisionstregeln der Potenzen. Man darf nur wiederum, Exempel der Regeln in

und setzen $a=16$; so ist $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = 4$ Zahlen.

und $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} = 2$. Dann 16 ist die

viers

172 Arithm. III. Cap. Von den

vierte Dignität von 2. Folglich wird
 $16^{\frac{1}{4}} : 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} : \sqrt[4]{16} = 4 : 2 = 2.$

Eben das ist auch $16^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16^2}$; dann 16^2
 oder 16 in der zweyten Dignität ist =
 $16 \cdot 16 = 256$; und 256 ist die achte
 Dignität von 2; wie man leicht aus bey-
 gesetzter Progression sehen kann:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Folglich ist $2 = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{16^2}$. Dem-
 nach wird auch allgemein und in der Buchs-

stabenrechnung seyn $a^{\overline{m}} : a^{\overline{r}} = a^{\overline{ms}} : a^{\overline{nr}} =$
 $a^{\overline{\frac{ms}{nr}}} = \sqrt[nr]{a^{\overline{ms}}}$. Wie man nun

Wie man
 solche Di-
 gnitäten zu
 höhern erhe-
 ben, oder ge-
 hebene Wur-
 zeln aus der
 selben aus-
 ziehen könne.

Dignitäten von dieser Gattung multipli-
 ciren und dividiren kann, so lassen sie
 sich auch zu höhern Dignitäten erheben,
 oder in niedrigere heruntersetzen. Jenes
 geschieht durch die Multiplication, dieses
 durch die Division der Exponenten. Wenn
 ich also $x^{\frac{1}{2}}$ zur dritten Dignität erheben
 will, so wird die neue Dignität heißen
 $x^{\frac{1 \cdot 3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$, und wenn ich $x^{\frac{n}{m}}$
 zur Dignität r erheben will, so heißt dies
 $x^{\frac{nr}{m}}$.

se neue Potenz $x^{\overline{m}}$: wer Exempel in Zahlen
 zeig

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 173

zeichen nachrechnen will, wird sogleich die Probe davon machen können. Sollte endlich die Cubic: Wurzel oder $\sqrt[3]{}$ aus $x^{\frac{1}{3}}$ gefunden werden, so ist die gesuchte Zahl $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3} \cdot 3} = x^1 = x$. auch hievon kann man die Probe in wirklichen Zahlzeichen machen. Der allgemeine Ausdruck

wird also der folgende seyn: $\sqrt[r]{}$ aus $x^{\frac{r}{m}}$

$= x^{\frac{r}{m}} = x^{\frac{r}{m} \cdot m} = \sqrt[m]{x^r}$; u. s. w. Alle diese Ausdrücke sind so beschaffen, daß man einen für den andern setzen kann, wenn die Rechnung dadurch hier und da sich erleichtern und faßlicher machen läßt. Wir wollen keine weitere Exempel anführen. Denn wenn man die S. 56 — 58. und überhaupt das bisherige mit Aufmerksamkeit gelesen hat, so wäre es etwas seltsames, wenn man die von uns gegebenen Ausdrücke nicht verstünde, und ähnliche sogleich nachmachen könnte.

563 36 723

IV. Cap.

Von den Proportionen und den daraus fließenden Regeln, wie auch von den Progressionen.

§. 76.

Was eine
Proportion
überhaupt
seyn, und
wie die Pro-
portionen
eingetheilt
werden.

Wie man
auf die Na-
tur der
arithmeti-
schen Pro-
portionen
kommen,

Die Gleichheit zweier Verhältnissen heißt eine Proportion; Nun gibt es arithmetische und geometrische Verhältnisse; §. 61. folglich gibt es auch arithmetische und geometrische Proportionen. Da nun eine arithmetische Verhältniß durch $a - b$ ausgedruckt, und bey diesem Ausdruck auf die Differenz gesehen wird, so darf man nur zum ersten Glied die Differenz addiren, da dann die Summe allemal das zweyte Glied seyn muß. Der Beweis davon gründet sich blos auf die Erklärung der Subtraction, davon wir schon gründlich gehandelt haben. Dann wenn ich die arithmetische Verhältniß zwischen 2 und 5 suche, so will ich wissen, um wie viel 5 größer sey als 2; da ich dann sogleich finde, daß die Differenz 3 und die gesuchte Zahl einerley sey. Also tre ich nun 3 zu dem ersten Glied 2, so habe ich $2 + 3$ oder 5, welches das zweyte Glied ist. Folglich ist $2 - 5 = 2 - (2 + 3)$ oder nach der allgemeinen Rechnung $a - b$

Proportionen und Progressionen. 175

$b = a - (a + d)$. Wenn also die Differenz d ist und das erste Glied a , so wird der Ausdruck für alle mögliche arithmetische Verhältnisse seyn $a - (a + d)$. Zwei arith. und sie auf metische Verhältnisse werden einander eine allge- gleich, wenn ihre Differenz einerley ist, und durch diese Gleichheit entstehet eine meine Weise arithmetische Proportion; wenn demnach ausdrücken das erste Glied a und das dritte b heisset, könne? so ist der allgemeine Ausdruck für alle arithmetische Proportionen der folgende: $a - (a + d) = b - (b + d)$. Dann wenn ich Was eine von dem zweyten Glied das erste a sub- continuirlich trahire, so ist die Differenz d , und wenn ich von dem vierten Glied das dritte b die arithmes subtrahire, so ist die Differenz abermal d . tische Pro- Wenn das dritte Glied dem zweyten gleich portion ist, oder wenn $a + d = b$, so ist die Pro- (Proportio continua); wenn aber diese beede Glieder un- continua) gleich sind, so heisset die Proportion eine abgesonderte oder discrete Proportion; und was eine (proportio discreta). 3. E. $4 - 6$ ist ei- abgesonderte ne arithmetische Verhältniß, deren Dis- (discreto) ferenz 2 ist; nun wird eine Proportion daraus, wenn ich eine andere arithmeti- sche Verhältniß von gleicher Differenz auf- suche, 3. E. $3 - 5$; dann $4 - 6 = 3 - 5$ oder $2 - (4 + 2) = 3 - (3 + 2)$; dieses ist nun eine discrete Proportion; sie wird aber continuirlich, wenn das dritte Glied dem zweyten gleich bleibt und auch 6 heisset. i. E.

3. E. $4-6=6-8$, oder $4-(4+2)=(4+2)-(4+2+2)$, und in Buchstaben $a-(a+d)=a+d-a+2d$. Die Zahlen oder Buchstaben die in einer solchen Proportion, sie mag hernach arithmetisch oder

Nahmen der geometrisch seyn, vorkommen, nennet man Glieder, und zwar nach der Stelle, Glieder einer wo sie stehen, das erste, das zweite, das Proportion. dritte, das vierte Glied.

§. 77. Wir handeln zuerst von den Von den we arithmetischen Proportionen; ihr allgemei-
sentlichen Ei- ner Ausdruck ist $a-(a+d)=b-(b+d)$.
genschaften Nun wollen wir sehen, was für Eigens-
der arithme- schaften diesem wesentlichen Ausdruck der
tischen Pro- arithmetischen Proportionen zukommen.
portionen, Wenn wir das erste und vierte Glied zus-
ammen addiren, so wird ihre Summe
der Summe der beeden mittleren gleich
seyn: dann $a+b+d=a+d+b$.

und wie man Der erste Ausdruck ist die Summe der
die Propor- beeden äussersten, der zweite aber die
tionen selbst Summe der beeden mittlern Glieder. Da
nun diese Summen augenscheinlich gleich
barnach be- sind, so haben wir ein sicheres und uns-
urtheilen trüglisches Kennzeichen, nach welchem wir
die arithmetische Proportionen beurtheilen
sollen? können. So oft nemlich di- Summe der
beeden äussersten und der beeden mittleren
Glieder gleich ist, so oft ist die vorgege-
bene Proportion eine arithmetische Pro-
portion. Wenn also einer das vierte
Glieder

Proportionen und Progressionen. 177

Glied suchen soll, so wird er es nach der Regel bald finden: dann es seye gege: Wie man bei das erste Glied a , das zweite b und das dritte c ; nun wollen wir das vierte x nennen: folglich wird die Proportion heis: $a - b = c - x$. Da nun nach der Regel in einer

$a + x = b + c$. So wird §. 9.

arithmeti-

$$a = a$$

schen Propo-

$$x = b + c - a.$$

tion sucht

Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man von der Summe des zweiten und dritten Gliedes das erste Glied abzieht. Dieses solle zu gegenwärtiger Absicht genug seyn; wie man die mittlere Glieder in continuirlichen Proportionen, und hernach auch in Progressionen andere Glieder suchen und finden solle, werden wir in diesem Capitel noch zeigen, wenn wir zuvor von den geometrischen Proportionen, die einen ungleich grössern und auf alle Theile der Mathematik sich erstreckenden Nutzen haben, das nöthigste gesagt haben.

§. 78. Eine geometrische Proportion Was eine ist die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnissen; sie wird wie die arithmetische Proportion in eine discrete und continuirliche eingetheilt. Wie man nun bei der ersten auf die Differenz siehet, so siehet man bei dieser kraft der Natur der geometrischen Verhältnisse auf den Quotienten.

geometrische Proportion seye,

ihre Unterschied von den arithmetischen Proportionen.

M

ten.

Allgemeiner ten. Da nun der allgemeine Ausdruck
 Ausdruck für einer geometrischen Verhältniß $a : ma$ ist,
 die geometri- für alle geometrische Verhältnisse seyn:
 sche Propor- $a : ma = b : mb$; oder, wie wir umständ-
 tionen. lich §. 65. erwiesen haben, $a : b = ma : mb$. Diese Fundamentalgleichung ist un-

gemein fruchtbar; und wir können nicht umhin, unsere Leser nochmalen zu erinnern, daß sie dasjenige, was jezo gesagt werden solle, mehr als einmal überlesen müssen, wenn sie in den folgenden Theilen der Mathematik sich einen Fortgang versprechen wollen. Der Ausdruck gründet sich auf die Natur der Proportion, und ist also nicht nur ein allgemeiner, sondern auch ein wesentlicher Ausdruck.

Wie man die Nun wollen wir einen Versuch machen, die wesentliche und wie bey den arithmetischen Proportionen die beede äußerste und die beede mittlere Glieder addiren, damit wir sehen, was heraus kommt. Allein die Summen $a + mb$ und $b + ma$ sind nicht gleich; nach u. nach folglich haben wir durch diese Operation erfinden solle, noch nichts gewonnen. Man versuche wird ange- aber auch die Multiplication; wenn wir zeigt. die beede äußerste und die beede mittlere Glieder mit einander multipliciren, so haben wir die Producte amb und bma ; diese beede Producte sind nun vollkommen gleich. Folglich werden bey allen geometrischen Proportionen die Producte der be-

Proportionen und Progressionen. 179

beiden äussern und mittlern Glieder einander gleich seyn; weil

$$a : b = ma : mb$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$amb = bma.$$

Dann was von diesem Ausdruck gesagt werden kann, das wird von allen nur möglichen Proportionen, wenn sie geometrisch sind, gelten. Es ist also eine Eigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darinnen besteht, daß das Product der beiden äussersten Glieder, dem Product der beiden mittlern Glieder gleich seye. Allein darauf kommt es jezo noch an, daß wir untersuchen, ob man diese Eigenschaft statt einer Erklärung der geometrischen Proportion gebrauchen, und sie nicht nur für einen allgemeinen, sondern auch für einen eigenthümlichen Charakter derselben ansehen dürfe. Dann in diesem Fall könnte ich nach den Bestimmungen der Logik sagen, so oft eine solche Eigenschaft sich bei einer Proportion zeigt, so oft ist die Proportion geometrisch. Die Eigenschaft muß aber, wie wir schon gemeldet haben, nicht nur allgemein, sondern auch der gedachten Art Proportion eigenthümlich seyn. Eine geometrische Proportion hat vier Glieder, die beide mittlern mögen hernach einander gleich oder ungleich seyn. Diese

W 2

Er

und warum
man dieses
vorzüglich
genau erwei-
sen und be-
stimmen
müsse,

und wie viel
an richtigen
Erklärungen
gelesen seye?

Eigenschaft ist allgemein, aber sie kommt auch den arithmetischen Proportionen zu. Folglich läßt sich noch nichts daraus für die geometrische Proportionen erweisen, weil sie ihnen nicht eigenthümlich ist. Man siehet also schon, wie viel daran gelegen seye, daß man vorher erweise, ein erfundener Charakter sey demjenigen Dinge, dem er zukommt, eigenthümlich, ehe man ihn zu einer Definition macht und weitere Beweise daraus ziehet. Das nöthigste davon habe ich in den Principiis cogitandi P. II. C. I. gesagt, und daselbst angemerkt, daß man entweder zeigen müsse, der Charakter komme sonst keinem andern Dinge zu, oder daß man zu erweisen habe, er fließe unmittelbar aus dem ganzen Wesen, das ist, nicht aus einzelnen, sondern aus allen wesentlichen Theilen des Dinges zugleich genommen. Beides können wir von der angeführten Eigenschaft der geometrischen Proportionen behaupten. Dann es gibt nur zweyerley Proportionen, nemlich arithmetische und geometrische; indeme alle übrige, davon wir reden werden, unter diesen Hauptgattungen begriffen sind. Den arithmetischen Proportionen kommt die gefundene Eigenschaft, daß nemlich die Producte der äußersten und mittlern Glieder einander gleich seyen, nicht zu; §. 77. folglich ist sie den geometrischen eigenthümlich. Sie fließt

Proportionen und Progressionen. 181

fließet ferner aus allen wesentlichen Stücken der geometrischen Proportion; dann Beweis und weil das zweite Glied aus dem ersten m mal genommen, und das vierte aus dem dritten wieder m mal genommen besteht, so haben die Producte der äussern und mittlern Gliedern einerley Factores; wo aber gleiche Factores sind, da sind auch gleiche Producte. Folglich ist die Eigenschaft, daß $a : b = ma : mb$ durch die Multiplication der äussersten und mittleren Glieder zwey gleiche Producte amb und bma gebe, der geometrischen Proportionen wesentlich und eigenthümlich, wie es selbst der Augenschein bey den Buchstaben gibt. Die allgemeine Regel für alle geometrische Proportionen wird demnach also heißen: Wenn in einer Proportion die Producte der beeden äussersten und der beeden mittlern Glieder einander gleich sind, so ist die Proportion geometrisch. Ehe ich nun den vorzüglich grossen und allgemeinen Nutzen dieser Regel zeigen kann, muß ich die Leser noch erinnern, daß sie die arithmetische und geometrische Proportionen und ihre beiderseitige Eigenschaften ja nicht mit einander vermengen, sondern was einer jeden eigenthümlich ist, sorgfältig von einander unterscheiden. Große Gelehrte haben sich hierinnen oft geirret; und ihre Schwäche gezeigt. Caspar Schott hat in seiner

der arithme- Technica curiosi L. VIII. c. I. ein Exem-
 pel von einem sonst vollkommenen Mess-
 schen und geo- kundigen, dessen Rahmen aber verschor-
 metrischen net blieb, angeführt, und einen Fehler
 Proportio- entdeckt, der bloß auf der Vermengung
 nen nicht ver- der beiderseitigen von uns angeführten
 Eignschaften beruhet. Wenn man von
 wange, und gleichem ungleiches subtrahirt, so werden
 die Reste sich umgekehrt verhalten wie die
 wie oft groß subtrahirte ungleiche Stücke; aber nur
 so Reststück, arithmetisch, und ja nicht geometrisch.
 ler. sich hier- Die zwei ungleiche Stücke sollen m und n
 seyn, das, wovon sie abgezogen werden,
 innen geiret solle a heißen: so wird seyn: $(a - m) -$
 haben: $(a - n) = n - m$; dann wenn man die
 beide äußerste und mittlere Glieder addirt,
 so kommen gleiche Summen heraus; z. E.
 $a - m + m = a - n + n = a$. weil sich
 $-m$ und $+m$ wie auch $-n$ und $+n$ ge-
 gen einander aufheben. Also ist die Pro-
 portion arithmetisch und nicht geometrisch.
 Der ungenannte Gelehrte hingegen hielt
 sie für geometrisch, und baute auf diese
 irrige Meinung eine sonst schöne und von
 einem nicht gemeinen Wiß zeugende Dem-
 onstration den Cirkel zu quadriren, wie
 man sie in dem angeführten Buch, wie
 auch in des sel. Herrn Prof. Krafftens In-
 stitut. Geom. sublim. nachsehen kann.
 Wir haben dieses Exempel um so eher an-
 gemerkt, je leichter es ist, Dinge, die so
 nahe zusammen grenzen, mit einander zu
 ver-

Proportionen und Progressionen. 183

vermengen, und je mehr man deswegen nöthig hat, die Liebhaber der Wissenschaften zu genauem, bestimmten, deutlichen und accuraten Ideen durch die Mathematik nach und nach zu gewöhnen.

§. 79. Nunmehr können wir den Nutzen unserer Regel zeigen. Dann wie man die arithmetische und geometrische Proportionen wenigstens bey uns Deutschen schon ausgedrückt, haben wir schon in der Einleitung gemeldet. Unsere Leser werden sich also noch zu erinnern wissen, daß man jene mit dem Zeichen der Subtraction, z. E. $a - b = c - d$, diese aber mit dem Zeichen der Division, z. E. $a : b = c : d$ schreibt. Die letztere, nemlich die geometrische Proportion, ist wie wir gehört haben, die fruchtbarste. Wir wollen daher unsere obige Regel auf sie anwenden, und sehen, wie man die Glieder versetzen, verändern, und so behandeln könne, daß bey aller Verschiedenheit doch immer noch eine geometrische wahre Proportion übrig bleibt. Die Fundamental-Proposition heißt $a : b = ma : mb$. Nun verändert man diese Gleichung, so oft man will, wenn nur nach geschehener Veränderung allemal vier Glieder herauskommen, und hernach die Producte der beeden äußersten und der beeden mittlern einander gleich sind, so wird die Proportion geometrisch seyn. Mich dünkt, diese Regel seye für

Von dem mathematischen Ausdruck der Proportionen.

Voran man alle geometrische Proportionen am leichtesten, geschwindesten u. sich erkennen und wiefer man überhaup die Glieder versetzen dürfe.

Anfänger leichter und faßlicher, als die gewöhnliche, nach welcher man einen auf die Exponenten der Verhältnisse weist; dann wenn diese einerley oder gleich sind, so ist die Proportion gewiß geometrisch. Allein, wer noch nicht geübt ist, wird die Gleichheit der Producte viel eher noch als die Gleichheit der Exponenten einsehen.

Warum es zuweilen schwer fene, die Exponenten aufzufuchen, und wie deswegen die obige Regel, eine geometrische Proportion zu bestimmen, der sonst üblichen Regel vorzuziehen seye?

Die Exponenten sind oft so versteckt, daß man sie erst durch eine mühsame Division auffuchen muß, da man im Gegentheil die Producte durch die Multiplication im Kopfe leicht berechnen und finden kann. Z. E. $2 : 9 = 4 : 18$, ist eine geometrische Proportion; dann $2 \cdot 18 = 36$ und $4 \cdot 9 = 36$. Dieses siehet man eher, als die Exponenten, welche $4\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{3}$ heißen; dann 2 in 9 ist $4\frac{1}{2}$ mal enthalten, und 4 in 18 ist $4\frac{2}{3}$ mal enthalten; da nun $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, so sind beedersseits die Exponenten $4\frac{1}{2}$, folglich einander gleich. Die letztere Rechnung ist aber schon beschwerlicher als die erste, welcher wir daher den Vorzug lassen, weil man billiger massen alle Regeln so kurz und faßlich vortragen solle, als nur immer möglich ist.

Von den Verlesungen und Veränderungen der Glieder.

§. 80. Nun wollen wir die Veränderungen der Fundamentalproportion suchen:

$$I. a : b = ma : mb.$$

$a : ma = b : mb$, hier haben wir die

Proportionen und Progressionen. 185

die beide mittlere Glieder versetzt, dem un- Warum man
geachtet kommen nach geschener Multi- die beide
plication einerley Producte amb und mab mittlere
heraus; folglich darf man in einer geome- Glieder ver-
trischen Proportion die beide mittlere Glieder
der versetzen.

II. $b : a = mb : ma$. Hier wird das Warum man
erste Glied zum zweiten und das dritte das erste Glied
zum vierten gemacht, und die Producte zum zweiten
 bma und amb sind abermal gleich; folg- und das drit-
lich ist auch diese Versetzung erlaubt; aus te zum vier-
gleichem Grunde erhellet, daß man auch ten, und um-
setzen dürfe. gelehrt, ma-
 $b : mb = a : ma$ und $ma : mb = a : b$,
und $mb : ma = b : a$, und $mb : b = ma : a$
setzen dürfe.

III. $a : b = ma : mb$; nun subtrahire Von den Ver-
man das zweite Glied vom ersten und das änderungen
vierte vom dritten, folgender Gestalt, daß
das zweite und vierte dennoch bleibe, so durch die
hat man $a - b : b = ma - mb : mb$; auch Subtraction.
diese Proportion ist geometrisch, weil die
Producte $(a - b)mb$ und $(ma - mb)b$,
oder wenn man wirklich multiplicirt, amb
 $- bmb$ und $mab - mbb$ wirklich einander
gleich sind; dann das wollen wir nicht
immer wiederholen, daß es gleichgültig
sey, wo die Buchstaben oder Factores
stehen. Folglich ist auch diese Proportion
geometrisch, wenn es heißt, $a - ma : ma$
 $= b - mb : mb$, oder $b - a : a = mb -$
 $ma : ma$, oder $mb - ma : ma = b - a : a$;
dann in allen diesen Fällen kommen durch

die Multiplication der äussersten und mittleren Glieder gleiche Producte heraus.

Von den Veränderungen durch die Addition. IV. Wenn ich das zweite Glied zum ersten, und das vierte zum dritten addire, daß das zweite und vierte doch noch in seiner Stelle bleibt, so habe ich $a + b : b = ma + mb : mb$; auch diese Proportion ist geometrisch; dann die Producte $(a + b)mb$ und $b(ma + mb)$, oder wenn man wirklich multiplicirt $amb + bmb$ und $bma + bmb$ sind wirklich einander gleich. Folglich wird gleichfalls seyn $a + b : ma + mb = b : mb$, und $ma + mb : a + b = mb : b$, und weil $mb : b = ma : a$, oder $\frac{mb}{b} = \frac{ma}{a}$,

nach §. 9. auch $ma + mb : a + b = ma : a$, u. s. w. Man darf nur sehen, ob allemal gleiche Producte herauskommen.

Von den Veränderungen durch die Multiplication. V. Nun wollen wir gleiches mit gleichem multipliciren, und die Proportion $a : b = ma : mb$ durch die Multiplication ändern; z. B. $ac : bc = ma : mb$; daß auch dieser Ausdruck geometrisch seye, zeigen die gleiche Producte $acmb$ und $bcam$ wiederum an. Ferner wird auch aus gleichem Grunde seyn $ac : mac = bc : mbc$, und $ac : mac = b : mb$, und $ac : mac = bd : mbd$, u. s. w. dann alle Producte sind nach der Regel einander gleich. Wie man aber einerley Sachen auf verschiedene Arten beweisen kann, so werden unsere Leser leicht begreifen, daß man auch aus §. 65.

Proportionen und Progressionen. 187

§. 65. sowohl diese als die folgende Veränderung demonstrieren könne.

VI. Wenn man die Proportionen durch die Division ändert, so wird man ebenfalls sehen können

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ma}{c} : \frac{mb}{c} ; \text{ dann die Proportionen durch die Division.}$$

duete $\frac{amb}{cc}$ und $\frac{bma}{cc}$ sind vollkommen

gleich; aus eben diesem Grunde darf man

auch sagen $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = ma : mb$, weil $\frac{amb}{c}$

$= \frac{bma}{c}$, und wiederum $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ma}{d}$:

$\frac{mb}{d}$ weil $\frac{bma}{cd} = \frac{amb}{cd}$, ferner $\frac{a}{a} : \frac{b}{a} =$

$1 : \frac{b}{a} = ma : b$, und $\frac{1}{b} : \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a}$

$= ma : mb$, weil $\frac{mb}{b} = \frac{ma}{a} = m$; ja

auch $\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{mb} : \frac{1}{ma}$, weil $\frac{1}{bma} =$

$\frac{1}{amb}$, u. s. w.

VII. Eben so geht es mit den Potenzen und Wurzeln; nur müssen in diesem Fall alle vier Glieder zu gleichen Potenzen erhöht, oder zu gleichen Wurzeln erniedrigt werden

die Erhöhung driget werden. Z. E. $a : b = ma : mb$,
 der Glieder folglich $a^2 : b^2 = m^2 a^2 : m^2 b^2$, oder
 zu gleichen überhaup $a^n : b^n = m^n a^n : m^n b^n$, weil
 Potenzen, $a^n m^n b^n = b^n m^n a^n$; hier lassen sich nun
 und durch ih alle Ausdrücke von Reg. I — V. wieder
 re Erniedrig anbringen; dann ich kann auch setzen
 gung zu glei $a^n + b^n : b^n = m^n a^n + m^n b^n : m^n b^n$ u. s. f.
 chenWurzeln, einen wollen wir besonders merken; nemlich den Ausdruck der Division; ich kann
 welche letztere sagen $\frac{1}{b^n} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{m^n b^n} : \frac{1}{m^n a^n}$; dieser aber
 Veränderung wird nach §. 59. kürzer und schicklicher
 gen besonders ausgedrückt, wenn man schreibt: $b^{-n} : a^{-n}$
 wichtig und $= m^{-n} b^{-n} : m^{-n} a^{-n}$, und weil die Pro-
 zu fassen portion noch bleibt, wenn ich nach Reg. V.
 sind. nur die eine Verhältniß dividire, so darf
 ich auch sagen $\frac{1}{b^n} : \frac{1}{a^n} = m^n a^n : m^n b^n$;

oder kürzer: $b^{-n} : a^{-n} = m^n a^n : m^n b^n$,

dann die Producte $\frac{m^n a^n}{a^n}$ und $\frac{m^n b^n}{b^n}$ sind

beiderseits gleich, nemlich m^n . Mit den
 Wurzeln verfährt man auf gleiche Weise;
 denn es ist

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ma} : \sqrt[n]{mb}$, nicht aber

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = ma : mb$; im ersten Falle nur
 sind die Producte der äussern und mitte-
 lern Glieder gleich, im letztern hin-
 gegen

Proportionen und Progressionen. 189

gegen nicht, wie man sogleich augenscheinlich sehen kann; dann die erste Proportion

$$\text{heißt nach §. 58. } a^n : b^n = m^n a^n : m^n b^n,$$

da dann die Producte $a^n m^n b^n$ und $b^n m^n a^n$ vollkommen gleich sind; im letztern Fall

aber wären die Producte $b^n m a$ und $a^n m b$, welche offenbar ungleich sind; folglich kann

die Proportion $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = ma : mb$, oder

nach §. 58. $a^n : b^n = ma : mb$, nimmermehr statt finden.

Außer diesen einfachen Hauptfällen gibt es noch einige zusammengesetzte, welche zu wissen nöthig sind, und die wir daher nur kürzlich anzeigen wollen.

Wenn zwei Proportionen mit einander so übereinkommen, daß zwei Verhältnissen davon einer und eben derselben dritten Verhältniß gleich sind, so kommt auf eine dreifache Weise die dritte Proportion heraus. Dann I. entweder sind die zwey erste paar Glieder, oder welches nach den Versetzungen gleichviel ist, die zwey letzte paar Glieder einander gleich; II. oder es ist das erste und dritte, oder zweyte und vierte paar Glieder, oder auch nach den Versetzungen das erste in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der

der

der einen dem vierten in der andern Proportion gleich; III. oder endlich ist das erste und letzte paar oder das zweite und dritte paar Glieder, oder das erste paar in der einen dem zweiten in der andern, und das dritte in der andern dem vierten in der ersten Proportion gleich. Im ersten Fall schließt man ex æquo, überhaupt; im zweiten ordinatim; im dritten perturbate.

Die folgende Exempel, die man sich wohl bekannt machen muß, werden das gesagte erläutern, wo der Beweis in Buchstaben dabey steht.

I. Fall: ex æquo Simpliciter.

$$\begin{array}{lcl} a:ma=b:mb & 4:8=3:6 \\ a:ma=c:mc & 4:8=5:10 \\ \hline b:mb=c:mc & 3:6=5:10 \end{array}$$

II. Ordinatim ex æquo.

$$\begin{array}{lcl} 1) a:ma=b:mb & 4:12=2:6 \\ \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ mna:ma=mnb:mb & 10:12=5:6 \\ \hline a:mna=b:mnb. & 4:10=2:5 \\ 2) a:ma=b:mb & 5:15=2:6 \\ \quad \swarrow \quad \quad \searrow \\ ma:mna=mb:mnb & 15:30=6:12 \\ \hline a:mna=b:mnb. & 5:30=2:12 \end{array}$$

III. Perturbate ex æquo.

$$\begin{array}{lcl} 1) a:ma=b:mb & 4:2=12:6 \\ \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ mna:ma=b:\frac{b}{n} & 8:2=12:3 \\ \hline a:mna=\frac{b}{n}:mb. & 4:8=3:6. \end{array}$$

2)

Proportionen und Progressionen. 191

$$e) a : ma = b : mb$$

$$4 : 2 = 12 : 6$$

$$ma : mna = b : b$$

$$2 : 8 = 3 : 12$$

$$\frac{ma : mna = b : b}{n}$$

$$\frac{2 : 8 = 3 : 12}{n}$$

$$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$$

$$4 : 8 = 3 : 6.$$

Wenn man ganz verschiedene geometrische Proportionen mit einander multiplicirt oder dividirt, so kommen wiederum geometrische Proportionen heraus, worinnen nur immer gleichnamigte Glieder bey den vier Rechnungsarten verbunden werden.

Es sey gegeben $a : ma = b : mb$

$$5 : 10 = 2 : 4$$

$$c : nc = g : ng$$

$$3 : 6 = 4 : 8$$

I. Multipl. $ac : mna = bg : mnb$ $15 : 60 = 8 : 32.$

II. Dividirt $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{g} : \frac{mb}{ng}$ $\frac{5}{3} : \frac{10}{6} = \frac{2}{4} : \frac{4}{8}$

Wenn die Proportionen einerley Verhältniß haben, so wird noch eine Proportion herauskommen, wenn man die gleichnamigte Glieder addirt oder subtrahirt; dann $a : ma = b : mb$

$$c : mc = d : md \text{ gibt}$$

$$a + c : m(a + c) = b + d : m(b + d)$$

$$2 : 4 = 3 : 6$$

$$5 : 10 = 1 : 2$$

$$7 : 14 = 4 : 8.$$

Ist aber die Verhältniß verschieden, so geht die Addition und Subtraction nicht an; die Multiplication und Division hingegen ist in allen Fällen richtig.

Wenn

Wenn bey Proportionen, die in einander multiplicirt werden, zwey nicht homologue Glieder gleich sind, so verhält sich das Product des ersten Paares Glieder zum Product des andern Paares, wie das dritte Glied der ersten zum vierten Glied der andern Proportion.

$$\begin{array}{l} \text{Es seye } T : t = E : v \\ C : c = v : e \\ \hline CT : tc = Ev : ev \quad \text{so ist} \\ \hline : v \\ CT : tc = E : e. \end{array}$$

Gesezt nun E und e bedeuten Wirkungen, C und c Ursachen, T und t Zeiten, in welchen die Wirkungen hervorgebracht werden, so werden sich die Wirkungen wie die Producte aus den Zeiten in die Ursachen verhalten: dann wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen wie die Ursachen; und wenn die Ursachen gleich sind, wie die Zeiten.

Wenn drey oder mehrere Proportionen ein so gemeinschaftliches Glied haben, so werden die Producte aller ersten Glieder zu den Producten aller zweyten Glieder sich verhalten wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten der letzten Proportion.

$$\begin{array}{l} a : b = g : h \\ c : d = h : q \\ e : f = q : r \\ \hline ace : bdf = ghq : hqr \\ \hline : hq \\ \hline ace : bdf = g : r. \end{array}$$

Diese

Proportionen und Progressionen. 193

Diese Proportion heißt man sonst die Kettenregel, wie die unmittelbar vorhergehende die Regel Quinque. Sie dienen, besonders die Kettenregel, dazu, daß man einen Begriff von den zusammengesetzten Verhältnissen bekomme, z. E. 3 ist in 12 viermal und 12 in 60 fünfmal enthalten; folglich ist die Verhältniß von 3 zu 60 aus der Verhältniß von 3 zu 12 und 12 zu 60 zusammengesetzt, das ist, 3 steckt in 60 viermal, fünfmal oder zwanzigmal. Das bisher vorgetragene muß man sich vorzüglich bekannt machen, weil die Lehre von den Proportionen, wie wir schon gemeldet, die Seele der ganzen Mathematik ist.

§. 81. Die bisherige Vorbereitungen werden uns nun das folgende, das man: ^{tung zur Re-}chem so schwer scheint, erleichtern, und die ganze Lehre von der so genannten Regel Detri, ^{gel Detri} und andern Regeln auf wenig Blättern faßlich machen. Dann es ist ^{wie man das} uns nichts mehr übrig, als daß wir ^{vierte Glied}gen, wie man in einer geometrischen Pro: ^{in einer geo-}portion das vierte Glied finden solle. Diese Erfindung wird uns zugleich den Weg zu ^{metrischen}den Eigenschaften der continuirlich: ^{Proportion:} geometrischen Proportionen und sodann auch der Progressionen bahnen. Aus dem vorher: ^{suche,}gehenden ist klar, daß die Producte der beiden äußersten und mittleren Glieder in einer wahren geometrischen Proportion ein: ^N ^{ander}

und durch
was für
Buchstaben
die unbe-
kannte oder
gesuchte
Größen an-
gezeigt wer-
den?

ander gleich seyn müssen. Da man nun das vierte Glied erst finden solle, so wollen wir es x oder y nennen, durch welche Buchstaben ohnehin dasjenige, was noch unbekannt ist, und erst erfunden werden solle, nach der Gewohnheit der Algebraisten ausgedrückt wird; und weil die drey ersten Glieder, nemlich a , ma , und b gegeben sind, so setzen wir nur

$a : ma = b : x$, und multipliciren nach §. 79. $ax = mab$, hernach dividiren

$$\frac{ax = mab}{a}; \text{ a wir beederseits mit } a, \text{ damit wir die unbekannte Grö-}$$

ße allein bekommen:

Dannmehr wissen wir, wie das vierte Glied heisset, nemlich $\frac{mab}{a}$ oder mb , weil $\frac{a}{a}$

$= 1$, und folglich in dem Ausdruck $\frac{mab}{a}$

hinweg fällt. Das vierte Glied wird also gefunden, wenn man das zweyte und dritte Glied miteinander multiplicirt, und das Product durch das erste Glied dividirt. Es ist zugleich ohne unser Erinnern klar, daß nach eben dieser Regel das erste, oder das zweyte, oder das dritte Glied gefunden werden könne. Dann die Proportionen darf man nach §. 70. versetzen; dahero es gleichviel ist, ob ich sage:

$$x : b = ma : a \quad \text{oder}$$

$$b : x = a : ma \quad \text{oder}$$

$$ma : a = x : b;$$

Man

Warum derjenige, der das vierte Glied finden kann, auch eben deswegen das erste, zweyte oder dritte finden könne, und wie man deswegen nichts

Man kann also jedesmal das unbekannte ^{Ursach habe,} Glied zum vierten und letzten machen, da ^{von der gewöhnlichen} ~~hier~~ wir in der längstens angenommenen Regel abzu-
 allgemeinen Regel mit Fleiß nichts ändern ^{geben.} ~~wollten.~~

Dieser Satz ist das Fundament der ganzen Regel Detri, und aller damit verbundenen Nebenregeln. Eben so kann ich das letzte Glied in einer continuirlichen Proportion finden, wenn ich setze:

$$a : ma = ma : x \quad \text{folglich}$$

$$ax = m^2 a^2 \quad \text{und}$$

$$x = \frac{m^2 a^2}{a} = m^2 a.$$

Dann, weil das zweite und dritte Glied ^{Wie man} in dieser Proportion einerley ist, so darf ^{das letzte} ich es nur doppelt setzen, und die Rechnung ^{Glied in einer conti-} auf die obige Regel reduciren, da ich ^{nuirlich ge-} gleich finden werde, wie das letzte Glied ^{metrischen} aussehen müsse; es heißt nemlich $m^2 a$; ^{Proportion,} und wie man ^{und wie man} wenn ich also das mittlere in diesem Fall ^{das mittlere} erst finden müßte, und das erste und letzte, ^{Glied findet} nemlich a und $m^2 a$ wären mir gegeben, so setze ich abermal nach meiner Regel:

$$a : x = x : m^2 a, \quad \text{folglich}$$

$$\underline{m^2 a^2 = x^2}$$

und durch Ausziehung der Quadraturwurzel in bloßem Zeichen §. 38.

$$\sqrt{m^2 a^2} = \sqrt{x^2} \quad \text{das ist}$$

$$m^{\frac{2}{2}} a^{\frac{2}{2}} = x^{\frac{2}{2}} \quad \text{oder}$$

$$a = x,$$

Da

Das

Das zweite oder mittlere Glied heißt demnach *ma*; welches abermal nach Anleitung der allgemeinen Regel gefunden worden ist.

Erläuterung Zur Erläuterung wollen wir einige Beispiel in Zahlen geben. Man solle zu 3, 6, und 4 die vierte Proportionalzahl finden, nach der Regel schreibt man also:

$$\begin{array}{r} 3 : 6 = 4 : x \\ 3x = 4 \cdot 6 \\ \hline : 3 \\ x = \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3} = 8. \end{array}$$

Demnach ist 8 die vierte Proportionalzahl; die Probe ist leicht zu machen. 3 ist in 6 enthalten 2 mal, und 4 in 8 ist auch zweimal enthalten; oder $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Ferner, wenn ich zu 3 und 6 die dritte Proportionalzahl suchen will, so schreibe ich:

$$\begin{array}{r} 3 : 6 = 6 : x \\ 3 \cdot x = 6 \cdot 6 \\ \hline : 3 \\ x = \frac{6 \cdot 6}{3} = 12. \end{array}$$

Also ist 12 die dritte Proportionalzahl, zu 3 und 6, dann $3 : 6 = 6 : 12$; verlange ich endlich zwischen 3 und 12 das mittlere Glied, so ist

$$\begin{array}{r} 3 : x = x : 12 \quad \text{folglich} \\ 3 \cdot 12 = x^2 \quad \text{und} \\ \sqrt{3 \cdot 12} = x. \end{array}$$

Well

Proportionen und Progressionen. 197

Weil wir nun noch nicht gezeigt haben, wie man die Wurzeln in Zahlen wirklich ausziehe, so lassen wir es diesmal bey dem blossen Zeichen bewenden; unerachtet man im Kopf bey dem gegenwärtigen Exempel leicht ausrechnen kann, was die Wurzel seye, dann $\sqrt{3.12} = \sqrt{36} = 6$.

§. 82. Wenn man die allgemeine Regel Was die Re-
§. 81. auf genannte Zahlen anwendet, und gel Detri
z. E. fraget, 3 Ehlen Tuch kosten 6 fl. was ingemein
kosten 4 Ehlen von dem nemlichen Tuch, heiße,

so heißt diese Anwendung die Regel Detri.

Nun begreift man leicht, daß es eine Menge und warum
von Fällen geben muß, worinnen man diese sie so einen
Rechnung nöthig hat; dahero man sich gar weitläufti-
nicht wundern darf, wenn man oft ganze gen Umfang
Bücher zu sehen bekommt, welche blos von habe, und
der Regel Detri handeln. Wir werden nichts desto
sie aber nach unserer gegenwärtigen Absicht weniger von
um so kürzer vortragen dürfen, je weniger uns so kurz
wir gesonnen sind, das praktische in derglei- und doch
chen Materien umständlich auszuführen. vollständig
Eines kann ich nicht ganz übergehen. Der vorgetragen
Reessische Nahme ist in dieser Rechnung werden könn-
so bekannt geworden, daß es ein Fehler ne.
seyn könnte, wenn ich ihn nicht nennen

würde. Man hat die Regel Detri nach der Was die ge-
schon vorgetragenen Regel §. 81. so lange nannnte
abgehandelt, bis endlich die so beliebte Rees- Reessische Re-
sische Art, die gegebene und gesuchte Zah- gel seye;
len zu setzen, aufgefunden, und von ih-
rem Erfinder, dem Herrn von Rees, einem

Allgemeiner
Beweis der
Reessischen
Regel, was
die Art die
Zahlen zu se-
zen betrifft.

Holländer, den Nahmen bisher beygehalten hat. Nach derselben schreibt man die Glieder der Proportion so, daß die Factores der zwey gleichen Producte durch einen Vertical: Strich von einander getrennet werden. §. 6.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ mb & ma \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|c} a & b \\ x & ma \end{array}$$

$$amb \mid bma \qquad ax \mid mab$$

Warum die
Anwendung
der Reess-
schen Regel
in manchen
Fällen noch
schwer fene,
und den An-
fängern oft
durch Re-
schen Regeln
erleichtert
werden müs-
se.

Nun siehet jedermann, daß es ganz gleichgültig ist, ob ich die Glieder nach der gewöhnlichen oder nach der Reessischen Methode setze; dann in einem wie in dem andern Fall müssen gleiche Producte herauskommen, und das ist nun der Beweis für die Reessische Rechnung. Man begreift aber wohl, daß wegen den manigfaltigen und oft sehr in einander geflochtenen Exempeln viele Sorgfalt und Aufmerksamkeit nöthig fene, damit man die Factores nicht verfehe, und was auf die eine Seite gehört, mit der andern nicht verwechsle. Diesen Fehler nun zu vermeiden, hat man je und je verschiedene neue Setzungsregeln ausgedacht, welche aber oft mehr Ausnahmen leyden, als die grammatische Regeln. Die Hauptsache bestehet darinnen, daß man nach den Proportionsregeln §. 79. 80. handeln, und durch die Übung so wohl als durch ein geschärftes Nachsinnen alle Glieder, die miteinander multipliziert werden müssen, sich bekannt mache. Wir

Proportionen und Progressionen. 199

werden das weitere hievon melden, wenn wir vorher noch einen andern Fall bey der Rees'schen Rechnung bewiesen haben. Es können nemlich die Glieder einer Verhältniß auch Brüche seyn, in welchem Fall die Rees'sche Regel haben will, man solle auf jeder Seite die Nenner austreichen, und selbige hernach als ganze Zahlen der gegenüber stehenden Seite zu geben, und sodann nach der ersten Regel nur Zehler und ganze Zahlen multipliciren. Der Beweis den Beweis davon ist leicht zu verstehen: Es seye die Proportion

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{f} = \frac{g}{h} : x$$

so hat man nach der gewöhnlichen Manier die Brüche, und Verse-

$$\frac{a}{c} \cdot x = \frac{bg}{fh}$$

$$x = \frac{bg}{fh} : \frac{a}{c} = \frac{bg}{fh} \cdot \frac{c}{a} = \frac{bgc}{fha} \text{ §. 71.}$$

 Nenner

folglich ist $x = \frac{bgc}{fha}$ und wenn man

beiderseits mit fha multiplicirt,

$$xfha = bgc.$$

Nach der Rees'schen Methode kommt gleiches heraus: dann man schreibt

$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{f}$	und setzt die ausges- strichene Nenner wechselsweis auf die andere Seite, mul- tiplicirt sodann und
$f x$	$\frac{g}{h}$	
$\frac{h}{h}$	$\frac{h}{h}$	

bekommt $afh x | bgc.$

N 4

Da

Da nun, wie wir erwiesen, $afbx = bcg$
 so ist, wie oben, $x = \frac{bcg}{afh}$. Nun ist

les bewiesen, was nur immer in der Rees'schen Regel zu beweisen war. Der Grund von der letzten Veränderung beruht darauf; daß die Division der Brüche in eine Multiplication des zu dividirenden Bruchs mit dem umgekehrten Divisor, verwandelt wird, welche gerade durch das Ausstreichen und Versetzen der Nenner sich bewerkstelligen läßt.

Eine höchst
 brauchbare
 Regel, durch
 deren Beob-
 achtung
 Glieder nach
 der Rees'schen
 Methode je-
 desmal rich-
 tig gesetzt wer-
 den können.

§. 83. Jetzt ist noch übrig, daß wir unseren Lesern auch Exempel geben, und die Anwendung dieser Regel zeigen. Zuvor muß ich aber einen sehr fruchtbaren und allgemeinen Satz noch anführen, welcher der in den mathematischen Wissenschaften wohl bewanderte und gelehrte Herr Pastor Flattich ohnelängst an mich überschrrieben hat: Er heißt mit einer kleinen Veränderung also: Alle Theile einer GröÙe, wodurch die GröÙe bestimmt und determinirt wird, werden in der Regel Detri nach der Rees'schen Methode mit einander multiplicirt, oder auf einer Seite den bestimmten GröÙen gegenüber gesetzt. Wer diesen Satz versteht, der wird ohne viele Mühe so gleich wissen, wie er die Zahlen setzen solle. Wir wollen ihn zuerst erklären, hernach beweisen. Die GröÙe des Zinses aus ei-
 nem

Proportionen und Progressionen. 201

dem Capital wird durch die Grösse des Exempel zur Capitals und durch die Länge der Zeit, Erläuterung wie lang ichs nemlich ausleihen, bestimmt und determinirt. Wenn also 600 fl. in der Regel, 6 Jahren 50 fl. Zins oder Interesse eintragen, so fräge ich, wie viel Interesse tragen 1600 fl. in 4 Jahren. Weil ich weiß ^{1. Exempel} was beederseits für Grössen theils gegeben theils gesucht werden, so darf ich nur die bestimmende Theile dieser Grössen so setzen, rechnungen, daß sie ihren Grössen gegenüber stehen, nach der sonst und sodann unter die zwey gleiche Proportionen genannnten ducte geben: z. E.

$$\left. \begin{array}{l} 600 \text{ fl.} \\ 6 \text{ Jahr} \\ x \text{ Zins} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 50 \text{ fl. Zins} \\ 1600 \text{ fl.} \\ 4 \text{ Jahr} \end{array} \right\}$$

Regula

quinque;

$$\text{folglich ist } x = \frac{6.600. x \mid 4.50.1600.}{4.50.1600. \mid 6.600.}$$

Eben so wird die Arbeit der Menschen, z. 11. Exempel E. ein Schloßbau oder eine Schanze bestimmt durch die Zahl der Arbeiter und tern und dem Wert das sie durch die Länge der Zeit, welche sie auf vollenden die Arbeit wenden: Wenn also 200 Soldaten sollen, nach der sonst ein geführten Regula trium in- verfa, Soldaten, wenn die Arbeit innerhalb 6 Tagen fertig werden solle. Ich setze hier wiederum

$$\left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ Soldaten} \\ 24 \text{ Tag} \\ 1 \text{ Schanze} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Schanze} \\ x \text{ Soldaten} \\ 6 \text{ Tagen} \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } \frac{200 \cdot 24}{6} = 6 \cdot x \quad \frac{200 \cdot 24}{6} = x \text{ Soldaten.}$$

Ans

Aus diesem Exempel siehet man, daß man keine umgekehrte Regel Detri (regula trium inversam,) nöthig hat; indeme die ganze Rechnung nach der allgemeinen Regel sich richtet, wenn man nur genau auf alles dasjenige Achtung gibt, was zur wirklichen Bestimmung einer Grösse oder hier zur Vollendung einer Arbeit für Theile und Umstände nöthig sind.

Noch einige

andere

Exempel.

Eben so antwortet man auf die Frage, wenn acht Personen, deren jegliche täglich drey Quart Wein trinken, innerhalb 28 Tagen ein Faß Wein austrinken, wie bald wird das Faß leer werden, wenn täglich 12 Personen daraus trinken, und jegliche 2 Quart trinket. Die Ausleerung des Fasses wird bestimmt durch die Anzahl der Trinker, durch den täglichen Trank eines jeden, und durch die Anzahl der Tage, wie lang sie trinken; diese sämtliche Theile bestimmen die Grösse, daher werden sie mit einander multiplicirt und nach der Rees'schen Methode folgender massen gesetzt:

8 Person.	ausgeleertes Faß.
3 Quart.	12 Person.
28 Tag.	2 Quart.
ausgeleertes Faß.	x Tagen.

$$8. 3. 28 = | 12. 2. x \text{ folglich}$$

$$\frac{8. 3. 28}{12. 2} = x. \text{ Tagen.}$$

Die

Die Exempel mit Brüchen werden eben so besonders behandelt; wenn z. E. 8 Ehlen $\frac{6}{4}$ breit Tuch ein Kleid geben, so fragt sich, wie viel auch mit man Ehlen brauche, wenn das Tuch nur $\frac{2}{4}$ ^{breit} ist. Es ist klar, daß das Kleid durch die Länge und Breite des Tuchs bestimmt wird; darum multiplicirt man diese Theile mit einander und setzt

$$\left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ Ehlen lang} \\ \frac{6}{4} \text{ breit} \\ 4, 1 \text{ Kleid.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Kleid. } 4 \\ x \text{ Ehlen} \\ \frac{2}{4} \text{ breit} \end{array} \right\}$$

$$8.6.4 = 5.4.x. \text{ folglich } \frac{8.6.4}{5.4} = x \text{ Ehlen.}$$

§. 84. Man bringt aber auch die so genannte welsche Practik dabey an, welche weiter nichts ist, als die Kunst, eine Verhältniß kürzer auszudrucken; die meisten geben hier wiederum besondere Regeln, welche man vor der wirklichen Multiplication noch beobachten soll. Allein da wir die Multiplication durch Zeichen nur anzeigen, so ist es weit schicklicher, daß man diese Verkürzung erst am Ende der Rechnung anbringt, weil man hierzu keine weitere Regeln nöthig hat, und die ganze Arbeit nur auf das, was wir §. 66. gesagt haben, reduciren darf. Z. E. in der letzten Aufgab habe ich

$$x = \frac{8.6.4}{5.4} \text{ das ist, weil 4 in 4 ein-} \\ \text{mal enthalten ist, folglich gegen einander} \\ \text{auf,}$$

Wie man die welsche Practik anbringe, und warum man sie am besten zuletzt nach geschlossener Rechnung, die aber nur durch Zeichen ausgedruckt wird, anbringen könne?

aufgehoben wird, $x = \frac{8.6}{5}$ auf gleiche

Weise verfähret man bey andern Exempeln; nur muß man immer die Hauptregel befolgen, daß man nemlich alle zugleich bestimmende Theile einer Gröſſe unter einander auf eben derselben Seite ſetzt u. ſ. w. Die übliche Reesische Regel heißt zwar also: Man ſetze die gegebene Zahlen ſo, daß auf beyden Seiten gleiche Nahmen zu ſtehen kommen. Allein es gibt Exempel, woben nicht allemal zwey gleiche Nahmen vorkommen. Folglich würde die Regel in dieſem Fall ſchon eine Ausnahme Glieder zu ſtellenden. Unſere obige erſte Regel hingegen iſt dieſer Gefahr nicht ausgeſetzt. Der Beweis davon iſt übrigens ſachlich genug. Dann die beſtimmende Theile ſind allemal der ganzen Gröſſe proportionell. Folglich müſſen ſie auf der gegenüber ſtehenden Seite zuſammen geſetzt werden. Weil nun kraft der Natur der Regel Detri die äußere und mittlere Glieder miteinander multiplicirt werden, ſo iſt klar, daß auch dieſe beſtimmende und determinirende Theile, jegliche auf der ihnen angewieſenen Seite, multiplicirt werden müſſen. Die herauskommende zwey gleiche Producte werden hernach ſo behandelt, daß die bekannte Factores desjenigen Products, in welchem das x enthalten iſt, das andere Product dividiren, damit man x allein bekomme. §. 9. Nun iſt

Vorteile

der obigen

Regel, die

Glieder zu ſtellenden.

nen, nebst ihm,

rem Beweis.

ist alles gesagt, was zur Regel Detri ge-
 hört. Dann daß man, wo ungleiche Be-
 nennungen z. E. Gulden und Kreuzer vor-
 kommen, alles vorher unter einerley Be-
 nennung bringen müsse, werden unsere Le-
 ser sich leicht vorstellen können, wenn sie
 das zwente Capitel von den vier Rechnungs-
 arten gelesen haben. Eben so will ich auch
 nicht erst erinnern, daß man bey Gesell-
 schaft's, Gewinn- und Verlustrechnungen u.
 s. w. die Regel Detri etlichmal anbringen
 müsse; man mag die Reesische oder eine an-
 dere Methode sich bekannt gemacht haben.
 Dann wenn z. E. 3 Personen mit 1800 fl.
 2000 fl. gewonnen haben, und die erste
 1000, die andere 500, die dritte 300 einge-
 legt hatte, so heißt es eben 1800 fl. gewinnen
 2000, wie viel gewinnen die eingelegte
 tausend der ersten Person; ferner 1800 ge-
 winnen 2000, wie viel gewinnen die einge-
 legte 500 fl. der zweyten Person; und end-
 lich 1800 fl. gewinnen 2000 fl. wie viel ge-
 winnen die eingelegte 300 fl. der dritten
 Person daran? u. s. w. Was endlich die
 Brüche betrifft, so werden am Beschluß der
 Rechnung auch diese in die gewöhnliche Zahl-
 nahmen verwandelt. Man sagt z. E. bey
 uns nicht $\frac{3}{4}$ fl., sondern 45 Kr. wenn also
 ein solcher Ausdruck vorkommt, so muß
 man ihn in einen andern verwandeln, der
 in dem Lande, wo man lebt, üblich ist.
 Das geschiehet nun durch die Regel Detri;

Wie man die am Ende der Rechnung zuweilen anhängende Brüche unter andere Benennungen bringen, und z. E. die Brüche der Gulden in Kreuzer ver- wandle.

tri; dann der Ausdruck $\frac{1}{2}$ fl. muß allemal dem Ausdruck $\frac{x}{60}$ fl. gleich seyn, weil 60 Kr. einen Gulden ausmachen. Es kommt also nur darauf an, daß wir x oder den Zehler zu dem Nenner 60 finden. Das ist nun bald geschehen; dann $\frac{1}{2}$ fl. = $\frac{x}{60}$ folglich $4 : 3 = 60 : x$ und also $x = \frac{3 \cdot 60}{4}$;

oder wenn wir für 3 den Buchstaben a und für 4 den Buchstaben b setzen, so wird in allen solchen Fällen herauskommen $\frac{a}{b}$ fl. =

$$\frac{x}{60}, \text{ oder } b : a = 60 : x, \text{ und } x = \frac{60 \cdot a}{b}.$$

Die allgemeine Regel wird also die folgende seyn: man multiplicirt den Zehler eines solchen Bruchs mit 60, und dividirt das Product mit dem Nenner, der Quotient wird Kreuzer geben. Wenn man im Früchtenmaas für 60 setzt 8, weil 8 Simri bey uns auf einen Scheffel gehen, oder im Weizenmaas 16, weil 16 Imi einen Hymer machen, u. s. w. so wird die Regel noch allgemeiner werden können. Wir haben von der Regel Detri fast mehr gesagt, als wir anfänglich gesonnen waren. Wer aber dem ungeachtet doch noch weitere Anwendungen und Exempel verlangen sollte, der wird sie in des gelehrten Hrn Pastor Engelhards ohne

ohne längst herausgegebenen Rechenkunst nach der Keesfischen Regel, umständlich finden.

§. 85. Wann mehrere continuirliche Proportionen also zusammen gesetzt werden, daß sich das erste Glied zum zweyten verhält, wie das zweyte zum dritten, und das zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten, und das dritte zum vierten, wie das vierte zum fünften, u. s. w. so entsteht eine Progreſſion, welche entweder geometrisch oder arithmetisch ist, je nachdem die Verhältniß der Glieder geometrisch oder arithmetisch ist. Die geometrische wollen wir zuerst betrachten, weil sie gemeinnütziger und in der Hauptsache auch nicht schwerer sind, als die arithmetische. Nun kann eine geometrische Proportion entweder immer steigen, oder immer abnehmen; im ersten Fall heißt sie eine divergirende, im zweyten eine convergirende Progreſſion. Wie ferne man etwas ähnliches bey den arithmetischen Progreſſionen beobachten könne, werden wir im folgenden zeigen. Eine geometrische Progreſſion ist demnach a, ma, m^2a, m^3a, m^4a u. s. w. Dann $a:ma = ma:m^2a$, und $ma:m^2a = m^2a:m^3a$, und $m^2a:m^3a = m^3a:m^4a$, wie man aus der §. 81. festgesetzten Regel leicht ersehen wird. Dieser allgemeine Ausdruck läßt sich nun auf allerhand Exempel in Zahlen anwenden; dann wenn $a = 1$ und $m = 2$, so

Was Progreſſionen seyen, und wie sie eingetheilt werden,

meiner Ausdruck für die arithmetische Proportionen,

wird durch Exempel in Zahlen erläutert.

so

so wird die Progression heißen:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. w.

ist $m = 3$, so heißt die Progression

1, 3, 9, 27, 81, 243, u. s. w.

Eigenschaft
ten der geo-
metrischen
Progressio-
nen,

Wenn $m = \frac{1}{2}$ so gibt es folgende Progression: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ u. s. w. Nun kann man aus dem blossen Anschauen dieser Progressionen mit Vergleichung der Proportionsregeln bald auf eine Eigenschaft schließen, welche eine von den ersten ist, die man sich in dieser Materie bekannt machen muß. Wir wollen setzen, die Progression gehe mit dem fünften Glied aus; in welchem Fall sie also ausstehet;

a, ma, m^2a, m^3a, m^4a ;

wenn ich nun das erste und letzte Glied mit einander multiplicire, so bekomme ich das Product m^4a^2 ; multiplicire ich das zweite und uneins letzte, nemlich ma mit m^3a , so bekomme ich wieder m^4a^2 ; multiplicire ich das dritte von vornen, und das dritte von hinten an gerechnet, das ist, im gegenwärtigen Fall, das mittlere mit sich selbst, so bekomme ich noch einmal m^4a^2 ; ich mache daher den richtigen Schluß, daß in einer geometrischen Progression die Producte der beeden äußersten Glieder, und die Producte aller von den äußersten beederseits gleich weit abstehenden Glieder einander gleich seyen; folglich wenn die Anzahl der Glieder ungleich z. E. 5, 7, 9, 11 u. s. w. ist,

Die Produ-
cte der auß-
sersten und
von den auß-
sersten bee-
derseits
gleich weit
abstehenden

so

Proportionen und Progressionen. 209

so wird das Quadrat des mittelsten Gliedes ^{Glieder sind} dem Product der beeden äußersten u. s. w. ^{allemaal ein-} gleich seyn. Die Probe kann man leicht ^{ander gleich.} in Zahlen machen. 3. E.

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 4, & 8, & 16 \\ & & 4 & 2 & 1 \\ & & 16 & 8 & 4 \end{array}$$

Eben so sehe ich in meiner obigen Progression, daß die letzte Dignität von m allemal um eins weniger ist, als die Anzahl der Glieder; die Progression hat 5 Glieder, und der Exponent von m im letzten Glied ist 4; er wäre 5, wenn die Progression 6 Glieder hätte, und 6, wenn sie sieben hätte, dann man darf nur fortfahren und schreiben

$$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, m^5a, m^6a,$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Folglich kann ich wiederum einen ^{Nach ein all-}gemeinen Ausdruck für die geometrische Progressionen finden, wenn ich die Zahl der Glieder ^{gemeinerer} der n nenne. Dann in diesem Fall wird ^{Ausdruck für} das letzte Glied allemal seyn $m^{n-1}a$, und ^{die geometri-} das n te Glied $m^{n-2}a$, das dritte ^{sche Progress-} von ^{tionen wird} hinten $m^{n-3}a$ u. s. w. ^{angeführt} ^{und erwiesen.} Dahero wird die obige Progression, wenn ich sie umgekehrt schreibe, folgende Gestalt bekommen:

$$m^{n-1}a, m^{n-2}a, m^{n-3}a, m^{n-4}a, m^{n-5}a,$$

$$m^{n-6}a \text{ u. s. w.}$$

Wenn einem also die Anzahl der Glieder ^{Wie man das} und der Exponent m gegeben wird, so läßt ^{letzte Glied} sich, ^{einer geome-} wofern a immer $= 1$, das letzte Glied ^{trischen Pro-} ohne Mühe finden. Dann die Anzahl der ^{gression fin-} Glieder $= n$ solle 5 und $m = 2$ seyn, so ^{bei}

Q

ist

ist das letzte Glied $= m^{n-1}a = 25^1 = 2^4 = 16$.

§. 86. Nunmehr können wir eben diejenige Aufgaben vollends finden, welche wir in der Lehre von den Proportionen gefunden haben. Wir haben schon gezeigt, wie wir das letzte Glied finden sollen. Es lassen sich aber auch nicht nur die mittlere Glieder finden, sondern auch das erste, und selbst das letzte kann noch auf andere Weisen gefunden werden. Das den Alten so schwer gefallene Problem zwischen zwei gegebenen Zahlen zwei andere continuirlich proportionelle zu finden, solle jezo zuerst vorgetragen werden. Wir wollen es noch allgemeiner machen, und sagen, man solle zwischen zwei gegebenen Zahlen so viel mittlere Proportionalzahlen suchen als man wolle. Die zwei gegebene Zahlen werden also das erste und letzte Glied der Progression seyn, weil die gesuchte mittlere Proportionalzahlen allesamt dazwischen hineinfallen. Weil sie uns nun beide gegeben sind, so wollen wir sie a und b nennen, nemlich das erste a und das letzte b . Ferner muß man einem sagen, wie viel man mittlere Proportionalzahlen verlange, das ist, ob man 3, 4, 5, 6 u. s. w. zwischen a und b suchen solle? folglich muß einem die Zahl der gesuchten Glieder auch gegeben werden; sie solle 4 seyn. Das erste von den unbekannten Gliedern wollen wir nach

Wie man die schwere Aufgabe von Erfindung zweier mittleren Proportionalzahlen leicht auflösen könne;

Allgemeine

Auflösung,

nach welcher

gezeigt wird,

wie man zwischen

zwei gegebenen

gegebenen Zahlen

so viel

der

Proportionen und Progressionen. 211

der Gewohnheit der Mathematikverständigen; mittlere Pro-
gen x nennen; folglich wird die Progression proportional-
son heißen

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, b.$$

zahlen finden

können, als

Dann nach §. 8. I. müssen wir folgende
Proportionen, die Glieder ausdrücken zu
können, niederschreiben:

$$a : x = x : \frac{x^2}{a} \text{ drittes Glied}$$

$$x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : \left(\frac{x^4}{a^2} : x \right) = \frac{x^4}{a^2} \text{ viertes Glied}$$

$$\frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2} = \frac{x^3}{a^2} : \left(\frac{x^6}{a^4} : \frac{x^2}{a} \right) = \left(\frac{x^6}{a^4} \cdot \frac{a}{x^2} \right) \\ = \frac{x^6 a}{a^4 x^2} = \frac{x^4}{a^3} \text{ fünftes Glied. §. 7 I.}$$

Folglich ist die Progression nochmalen richtig; man nur
tig gesetzt, wenn man schreibt

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, b.$$

immerver-

langet.

Demnach müssen auch die Producte der
beiden äußersten und von den äußersten
gleich weit abstehenden Glieder einander
gleich seyn, folglich

$$ab = x \cdot \frac{x^4}{a^3}, \text{ das ist}$$

$$ab = \frac{x^5}{a^3}$$

$$\frac{a^4 b}{a^3} = x^5 : a^3$$

$$\sqrt[5]{a^4 b} = x.$$

D 2

Also

Also wird das zehnte Glied seyn die Wurzel der fünften Potenz aus dem Product des letzten Glieds in das zur vierten Dimension erhöhte erste Glied. Wann nun

$a = 1$, und $b = 243$, so ist $x = \sqrt[5]{243} = 3$; folglich heißt die Progression

1, 3, 9, 27, 81, 243.

Die Auflösung dieser Frage wird noch allgemeiner gemacht.

Man kann die Auflösung noch allgemeiner machen, wenn man die Anzahl der gesuchten mittleren Glieder n nennet; dann in diesem Fall sehe ich schon, wie die Progression fortgehen müsse, indeme das letzte der gesuchten Glieder $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ und folglich

das letzte in der ganzen Progression, welches wir als ein gegebenes Glied b nennen, durch einen andern Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{a^n}$

heissen wird, weil in der Progression

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \dots, \frac{x^n}{a^{n-1}}, \frac{x^{n+1}}{a^n}$$

der Exponent des Nenners allzeit um eins weniger ist als der Exponent des Zehlers. Da nun das letzte Glied gegeben, und b genannt wurde, so ist

$$b = \frac{x^{n+1}}{a^n} \text{ folglich}$$

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot a$$

$$ab = \frac{ax^{n+1}}{a^n} \text{ das ist}$$

ab

$$ab = \frac{x^{n+1}}{a^{n-1}}$$

§. 57.

$$\frac{a^{n-1}ab}{a^n b} = \frac{x^{n+1}}{x^{n+1}}$$

das ist nach §. 49.

$$\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} = 1$$

$$\sqrt[n+1]{a^n b} = x.$$

Sollte jemand bey dieser Rechnung sich Erklärung nicht mehr besinnen können, warum §. 57. einiger

$\frac{a}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}}$ so darf er nur im Sinn für n schwer scheitern

eine Zahl §. 4 setzen, so wird er haben neben Gleichungen,

$\frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^{4-1}}$. Nun ist $\frac{a}{a^4} = \frac{a}{aaaa}$, die bey dies

das ist, wenn man wirklich dividirt $\frac{1}{aaa}$ ser Rech-

§. 57. folglich $\frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{4-1}}$; Eben nung vor-

so geht es mit $a^{n-1}ab = a^n b$; dann n sey abermal 4, so wird man haben $a^{4-1}ab = a^4 b$; die Ursache ist leicht aus §. 49.

begreiflich. Es ist ja $a^{4-1}ab = a^3 ab = aaaab = a^4 b$. wie es in der angezogenen Stelle umständlich bewiesen ist. Wir haben diesen Ausdruck mit Fleiß noch einmal erläutert, weil ungemein viel daran gelegen ist, daß man ihn wisse, und fertig einschen lerne.

§. 87. Ehe wir zeigen, wie die Summe einer geometrischen Progression gefunden

Exempel den werde, wollen wir noch zur Uebung
 zur Uebung, ein leichtes Exempel hersehen, welches uns
 wie man aus lehret, wie man aus gewissen gegebenen
 gewissen ge- Stücken der Progression ihr erstes und letz-
 gebenen seyn tes Glied finde. Die gegebene Stücke sollen
 I. Das Product oder Factum der beez-
 den äußersten Glieder, welches wir
 nennen wollen $= f$
 II. Die Anzahl der Glieder $= n$
 III. Die Grösse der Verhältniß, oder
 der Exponent $= m$
 Nun solle man finden das erste Glied $= x$
 und das letzte $= y$.
 Man wird leicht begreifen
 daß $f = xy$ folglich
 $\frac{f}{x} = y$ da nun auch §. 85.

$$\frac{m^{n-1}x = y}{\text{so ist §. 9.}}$$

$$\frac{f}{x} = m^{n-1}x \quad \text{und}$$

$$\frac{f}{m^{n-1}} = x^2 \quad \text{folglich}$$

$$\frac{f}{m^{n-1}} = x^2 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\frac{f}{m^{n-1}}} = x.$$

Also hat man das erste Glied in lauter
 bekannten Grössen gefunden; wenn es nun
 mit

Proportionen und Progressionen. 215

mit m^{n-1} multiplicirt wird, so hat man auch das letzte Glied; welches ebenfalls gefunden wird, wenn man das gegebene Factum durch das bereits gefundene erste Glied dividirt. Wer Exempel in Zahlen nachmachen will, der wird eine gute Uebung seiner Rechenkunst haben.

§. 88. Die Summe einer geometrischen Progression läßt sich finden, wenn man nur das erste und letzte Glied und den Ratio der Verhältniß weiß. Die Art und Weise selbst, wie man aus diesen gegebenen Stücken die Summe findet, können wir nicht faßlich genug vortragen; es sey dann, daß wir unsere Leser zuvor an die umständlich beschriebene Art mit Buchstaben in allerhand Dignitäten zu dividiren erinnern und zuruck denken heißen. Wenn sie z. E. $m^{n-1}a$ durch m wirklich dividiren sollten, wie würden sie es angreifen, damit der Quotient $m^{n-2}a$ u. s. w. herauskomme? Man darf nur n als eine Zahl z. E. 4 sich vorstellen; so wird $m^{n-1}a = m^{4-1}a = m^3a = mmm a$; diese GröÙe durch m dividirt gibt mma , das ist m^2a , und wenn ich den obigen Exponenten 4 gern beibehalten wollte, $m^{4-2}a$; folglich im allgemeinen Ausdruck, wenn ich für 4 das erste n wieder setze, $m^{n-2}a$. Multiplicirt man nun diesen Quotienten mit dem Divisor m , so hat man $mm^{n-2}a$, das ist $m^{n-1}a$, welches die zu dividirende GröÙe war. Dann wenn ich für n wie-

Was man zu wissen nöthig habe, wenn man die Summe einer geometrischen Progression finden solle, und wie man die wirkliche Division der Buchstaben durch zusammen-gesetzte Divisores zu diesem Vorhaben brauchen und wiederholen der müsse.

der 4 setze, so ist $mm^{n-2}a = mm^2a = m^3a = m^{n-1}a$; das ist die obige zu dividirende Grösse. Jetzt können wir die Summe der geometrischen Progression suchen. Das erste Glied setze a , die Zahl der Glieder n , der Name der Verhältniß m , so ist das letzte Glied bekannter massen $m^{n-1}a$; nun wollen wir von diesem letzten Glied das erste subtrahiren, so wird die Differenz seyn $m^{n-1}a - a$, diese Differenz läßt sich vielleicht mit dem um eins verringerten Namen der Verhältniß, das ist, mit $m-1$ schicklich dividiren; wir versuchen es wenigstens, und sehen, was heraus kommt: es seye also:

wirkliche

Auflösung

der Frage,

wie man die

Summe es-

ser geome-

trischen

Progression

finden solle,

$$m^{n-1}a - a(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + a + m^{n-5}a + \dots)$$

$$(m-1) \frac{m^{n-1}a - m^{n-2}a}{+ m^{n-2}a - a}$$

$$(m-1) \frac{m^{n-2}a - m^{n-3}a}{+ m^{n-3}a - a}$$

$$(m-1) \frac{m^{n-3}a - m^{n-4}a}{+ m^{n-4}a - a}$$

$$(m-1) \quad \text{u. s. w.}$$

Aus dem obigen Quotienten sehe ich schon, wie die Glieder fortgehen; wenn ich nun weiß, wie groß n ist, so wird sich die Division endigen. Z. E. n setze 5; so ist $m^{n-5}a = m^0a = a$; also das erste

erste Glied. Wäre aber n eine unendlich grosse Zahl, so würde die Division auch ins unendliche fortwähren, und in diesem Fall nichts für die Erfindung der Summe gewonnen werden. Folglich ist die Rede hier nur von endlichen Summen. Bei diesen gibt nun, wie es der Augenschein lehrt, der Quotient alle Glieder, §. 85. ausgenommen das letzte, wenn ich also zum Quotienten das gegebene letzte Glied vollends addire, so habe ich die ganze Summe der geometrischen Progression, welche nach dem gegebenen Beweis folgender massen ausgedrückt werden kann:

$$\frac{m^{n-1}a - a}{m - 1} + m^n - 1a. \quad \text{Dieser}$$

Ausdruck läßt sich schicklicher und kürzer schreiben, wenn man das zweite Glied als einen Bruch, dessen Nenner eins ist, ansieht, und hernach alles unter einerley Benennung bringt; da es dann heisst

$$\frac{m^{n-1}a - a + m^n a - m^n - 1a}{m - 1},$$

das ist, wenn man plus und minus in Wie man
den beiden gleichen Grössen gegen einan- die gefunde-
der aufhebt, $\frac{m^n a - a}{m - 1}$. Nach der ersten ne Regel
schicklicher
ausdrücken

Gleichung wird also die Summe einer geometrischen Progression gefunden, wenn und auch
man die Differenz des letzten und ersten Gliedes durch den um eins vermin- wirklich in
Worte ver-
fassen könne;

derten Exponenten dividirt, und zum
 Quotienten das letzte Glied addirt.
 Die Rede aber ist, wie wir schon gemel-
 det, von endlichen Progressionen; daher
 unsere gegebene Regel auf unendliche Re-
 ihen nicht angewandt werden kann; weil
 sich aber doch manche ins unendliche fortge-
 hende Progressionen summiren lassen, so wol-
 len wir auch von diesen noch etwas melden.

Ob und wie
 man ins un-
 endliche
 fortgehende
 Progressio-
 nen und
 Reihen
 summiren
 könne?

§. 89. Wenn man sagt, daß unendli-
 che Reihen sich summiren lassen, so ist leicht
 begreiflich, daß die Glieder solcher Reihen
 immer abnehmen oder kleiner werden, folg-
 lich sich zuletzt in Brüche verlihren müssen,
 deren Nenner unendlich groß sind; sonst wä-
 re es eine pure Unmöglichkeit, die Summe
 davon in endlichen Zahlen zu geben. Nun
 wissen wir aus dem dritten Capitel schon, daß
 eine unendliche Reihe von Brüchen entstehe,

und wie in
 diesem Fall
 die Glieder
 der Progressi-
 on Brüche
 seyn müssen,
 deren Nenner
 zuletzt
 unendlich
 groß werden.

wenn man die Brüche $\frac{a}{b-c}$ und $\frac{a}{b+c}$ durch

die wirkliche Division in ihren Quotienten
 verwandelt, so haben wir gefunden, daß

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ u. s. w.}$$

Nunmehr aber wollen wir von dieser Auf-
 gabe gleichsam nichts wissen, und einen an-
 dern Versuch wagen, welcher darinnen be-
 steht, daß man eine unendliche Reihe sum-
 miren solle, wenn man auch nicht wüßte,
 durch was für eine Division sie entstanden
 sene. Man gebe uns also etliche Progressio-
 nen von Brüchen, deren Zehler allesamt eins
 sind,

Proportionen und Progressionen. 219

sind, und deren Nenner in einer geometrischen Progression fortgehen; der allgemeine Ausdruck für diese Gattung von Progressionen wird demnach seyn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \frac{1}{a^6} \text{ u. s. w. } = S.$$

Wann nemlich S die zu suchende Summe bedeutet. Nun multiplicire man beiderseits mit a ; so hat man

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w. } = a S$$

ferner subtrahire man beiderseits eins, so hat man wieder die erste Progression

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w. } = a S - 1.$$

$$\text{Dannun } \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w. } = S$$

$$\text{so ist } \begin{array}{r} a S - 1 = S \\ 1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a S = S + 1, \\ S = S \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a S - S = 1. \\ (a - 1) S = 1 \end{array}$$

Das ist, schließlich ausgedruckt

§. 60.

folglich wenn beiderseits mit $a-1$

$$S = \frac{1}{a-1} \text{ dividirt wird,}$$

Wenn also $a = 2$, so ist die Summe

Einfge Sätze folgen folger Progressionen werden angeführt; Erster Fall, wann der Zehler immer eins, und die Nenner in einer geometrischen Progression wachsen, aber so, daß die Zeichen immer plus sind.

$$= \frac{1}{2-1} = 1; \text{ wenn } a = 3, \text{ so ist die}$$

$$\text{Summe } \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}; \text{ wenn } a = 4, \text{ so ist}$$

$$\text{die Summe } \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \text{ u. s. w.}$$

Der andere Fall ist, wenn die Zeichen plus und minus abwechseln, z. E. es sey

Zweiter Fall, $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w.} = S$
wenn die Zei

chen plus : a

und minus $1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} = a S$

abwechseln. Diese Gleichung ist eben so wahr, wenn die Zeichen verändert werden, und es hernach heisset

$$-1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} = -a S,$$

folglich wenn beiderseits eins addirt wird:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \text{ u. s. w.} = 1 - a S,$$

da nun

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \text{ u. s. w.} = S \text{ gesetzt wurde, so ist §. 9.}$$

$$1 - a S = S, \text{ und wenn man beiderseits } a S \text{ addirt;}$$

$$1 = S + a S, \text{ oder schicklicher ausgedr.$$

$$1 = (1 + a) S \text{ drückt §. 60.}$$

folglich

$$----- : 1 + a$$

$$\frac{1}{1+a} = S.$$

Wenn

Proportionen und Progressionen. 221

Wenn also $a = 2$, so ist bey abwechselnden Zeichen die Summe der Progression

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; \text{ ist } a = 3, \text{ so wird die Summe}$$

$$\text{seyn } \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \text{ u. s. w. Es ist ob. Allgemeine}$$

ne unser Erinnern klar, daß in beiden Fällen der Ausdruck noch allgemeiner werden könne, wenn man statt des Zehlers einen Buchstaben $z. B. n$ setzt, der aber die ganze Reihe hindurch unverändert bleibt, in welchem Fall die Summe bey einerley Zehler mag heißen wird $\frac{n}{a-1}$, und bey abwechselnden

$$\text{seyn } \frac{n}{a+1}; \text{ dann es seye}$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} + \frac{n}{a^4} = S.$$

$$\text{---, } a$$

$$n + \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} = aS$$

$$\text{--- } n \text{ subtr.}$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} \text{ u. s. w.} = aS - n.$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} = S \text{ folglich}$$

$$aS - n = S.$$

$$n = n$$

$$aS = S$$

oder eine andere Zahl seyn, wenn sie nur nicht verändert wird.

$$\begin{array}{r} aS = S + n \\ S = S \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aS - S = n \\ (a - 1)S = n \end{array} \quad \text{folglich §. 60.}$$

$$S = \frac{n}{a-1}$$

welches der kurz

Was zu thun seye, wenn vor dem ersten Bruch eine oder mehrere ganze Zahlen in geometrischer Progreßion vorangehen, und wie man auch daffalls die Summe finden könne.

je Ausdruck war. Endlich ist vorhin klar, daß zu dergleichen Summen die ganze, Zahlen addirt werden müssen; wenn nemlich vor dem ersten Bruch solche stehen; z. E. wenn die Progression mit 1 anfänge,

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Oder wenn eine wirkliche Progression in ganzen Zahlen vorangienge; welche man, wenn sie nur nicht unendlich groß ist, nach §. 38. summirt, und hernach zur Summe der Progression in Brüchen addirt.

Ob und wie ferne man auch andere solche unendliche Progressionen summiren könne, deren Nenner nach einem andern und mehr verborgenen Gesetze sich richten.

§. 90. Ausser diesen Progressionen, die nach einem beständigen und leicht in die Augen fallenden Gesetze sich richten, gibt es noch andere, welche zwar auch eine Regel haben, die aber so verdeckt ist, daß man sie nicht so bald einfiehet. Z. E.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} + \frac{1}{48} \text{ u. s. w.}$$

ist eine wahre Progression, deren Summe = 1. Die Regel, wornach sie sich richtet, ist sehr verborgen. Sie heißt aber so: wenn man die Nenner der Brüche um eins vermehrt, so sind es Potenzen; $3 + 1 = 4 = 2^2$; $7 + 1 = 8 = 2^3$; $8 + 1 = 9 = 3^2$; $15 + 1 = 16 = 2^4$ u. s. w.

u. s. w. folglich läßt sich ein jedes Glied durch den allgemeinen Ausdruck bestimm-

men $\frac{1}{m^n - 1}$. Allein damit wollen wir

uns iezo nicht aufhalten. Die Rechnung selbst, aus welcher erhellet, daß die ganze Summe = 1 seye, ist etwas groß und weildäufig, unerachtet sie übrigens nicht schwer ist. Wir würden sie aber dennoch

ganz hersehen, wenn die Kunst dergleichen Progressionen zu summiren, von so großem Gewichte wäre. Sie ist nicht so gemeinnützig als andere nöthigere Stücke der mathematischen Wissenschaften. Neben dem kann

man sich viele Mühe und Arbeit versparen, wenn man bey dergleichen Aufgaben die Fluxionen; Rechnung oder die Differential- und Integral-Rechnung zu Hülfe nimmt, wie wir an seinem Ort zeigen werden. Eines

muß ich noch, ehe ich die arithmetische Progressionen erkläre, meinen Lesern vorhalten. Man darf sich nicht irre machen lassen, wenn man hier oder da auch von Gelehrten paradoxe Sätze höret, dergleichen

Guido Grandus festgestellt, indeme er behauptet, das unendliche in der Mathematik habe eine Kraft, aus nichts etwas zu machen, und eine Summe von unendlich vielen Nullen in eine wirkliche positive GröÙe zu verwandeln. Man muß die Lehre von dem unendlichen vorher in der philosophischen Schule in Rücksicht auf das sogenannte un-

Warum man diese Frage mit keinen umständlichen Exempeln beleuchtet.

Was von der Meinung dererjenigen zu halten, welche, wie Guido Grandus, so viel paradox scheinend Sätze in der Lehre von den unendlichen Reppen sich vorstellen und behaupten.

ende

und wie man
 dergleichen
 Leute theils
 durch die
 Grundsätze
 der Philoso-
 phie,
 theils durch
 eine genaue
 Beobach-
 tung und Er-
 klärung der
 Divisions-
 Regeln, wor-
 auf derglei-
 chen unend-
 liche Ketten
 beruhen, wie-
 der zurecht
 weisen müsse.

endliche besucht, sonst wird man sich bald
 verwirren und auf irrige Begriffe gerathen.
 Eine von den besten Schriften in dieser Art
 ist des berühmten Herrn Prof. Ploucquet
 Methodus tractandi infinita.. Was aber
 die von den unendlichen Ketten hergenom-
 mene Einwendungen, und besonders die
 Meynung des Grandus betrifft, so hat der
 berühmte Hr Prof. Kästner umständlich in
 seiner Diss. de lege continuitatis darauf ge-
 antwortet. Dann die unendliche Ketten
 sind entweder convergirend oder divergirend;
 im ersten Fall wird das letzte Glied so klein
 werden, daß es für nichts zu achten; im
 letztern Fall aber werden die Glieder, je
 weiter sie vom ersten abstehen, immer
 grösser. Da nun beide Ketten durch die
 Division von $\frac{n}{a-1}$ oder $\frac{n}{a+1}$ entstehen
 können; bey einer wahren Division aber
 der Rest zum Quotienten noch beygesetzt
 werden muß, auch bey einer Division, die
 ins unendliche gehet, eben deswegen, weil
 sie nie aufhört, immer ein Rest übrig bleibt:
 so muß man ja bey solchen Ketten, um den
 wahren Wehrt des Quotienten zu haben,
 noch inmer einen Rest hinzudenken. Z. E.
 wenn ich sage $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 = x^3$,
 so muß ich zum Quotienten den Rest $\frac{x^4}{1-x}$
 noch addiren, woferne ich nicht fehlen will;
 wollte

Proportionen und Progressionen. 225

wollte ich bey x^{1000} aufhören, so müßte ich den Rest $\frac{x^{1001}}{1-x}$ noch addiren u. s. w.

Eben so muß ich bey dem Ausdruck $\frac{1}{1+1}$
 $= \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w.
 immer noch den zu dividirenden Rest $+$
 $\frac{1^{100}}{1+1}$ addiren, sollte ich auch ins unende-

liche fort dividiren können. Folglich ist wirklich $\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$ oder $= 1 - \frac{1}{2}$; nemlich mit dem zum Quotienten geschlagenen Rest, welchen man niemals weglassen darf, wenn man den Quotienten richtig haben und in seiner Berechnung nicht fehlen will. Eben von dieser Materie habe auch vor mehrern Jahren schon in meiner Lettre sur quelques paradoxes du Calcul analytique das weitere vorgetragen und ausgeführt.

§. 91. Arithmetische Progressionen entstehen, wenn man continuirlich arithmetische Proportionen so zusammen setzt, daß nicht nur das erste Glied zum zweyten sich verhält wie das zweyte zum dritten, sondern auch das zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten, und das dritte zum vierten wie das vierte zum fünften u. s. w. So machen z. E. die in natürlicher Ordnung fortlaufende arabische Zahlzeichen eine arithmetische Progression,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, u. s. w.

Dann $1 - 2 = 2 - 3,$

$2 - 3 = 3 - 4$

$3 - 4 = 4 - 5$ u. s. w.

D

In

**Allgemeiner
Ausdruck
für alle arith-
metische
Progressio-
nen.**

In einer arithmetischen Progression wird also die Differenz gesehen; wenn diese ewerley bleibt, so ist die Progression richtig. So ist die Differenz zwischen 1 und 2 eins, zwischen 2 und 3 wieder eins, zwischen 3 und 4 gleichfalls eins u. s. w. Gesezt nun, das erste Glied einer solchen Progression heisse a , die Differenz d , so wird der allgemeine Ausdruck für die arithmetische Progression seyn;

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$ u. s. w.
wenn nun das erste und letzte Glied zusammen addirt wird, so hat man $2a+5d$, addirt man das zweite von vornen zum zweiten von hinten, so hat man wiederum $2a+5d$. u. s. w. Dann

$$\begin{array}{r} u, a+d, a+2d, a+3d, \quad a+4d, \quad a+5d. \\ \qquad\qquad\qquad a+2d \quad a+d \quad a \\ \hline 2a+5d \quad 2a+5d \quad 2a+5d \end{array}$$

**Allgemeine
Eigenschaf-
ten der arith-
metischen
Progressio-
nen.**

folglich sind in einer arithmetischen Progression die Summen der beeden äußersten Glieder und die Summen zweyer von den äußersten gleich weit absteigender Glieder allemal einander gleich. Diese Eigenschaft der arithmetischen Progressionen gründet sich, wie wir schon oben bey der Natur der Proportionen gemeldet, auf den wesentlichen Begriff einer solchen Progression, und ist aus dem angeführten allgemeinen Ausdruck leicht erweislich und verständlich. Eben dieser Ausdruck bahnet uns zugleich den Weg,

Proportionen und Progressionen. 227

Weg, das letzte Glied in einer solchen Progression zu finden. Dann wir sehen, daß die auf das erste folgende Glieder allesamt aus dem ersten Glied und der Differenz, ein oder etlichmal genommen, zusammen gesetzt sehen. Geben wir nun auf die Anzahl der Glieder Achtung, so können wir finden, wie vielmal die Differenz bey einem jeden Glied genommen werde.

Ben dem zwayten Glied wird sie einmal, bey dem dritten zweymal, bey dem vierten drey mal, bey dem fünften viermal; folglich immer einmal weniger, als die Anzahl der Glieder betragen hat. Gesezt nun diese Anzahl heisse n , so wird das letzte Glied nach der beobachteten Regel seyn $a + (n - 1)d$, demnach gibt es abermal eine ausgebrachte Progression, wenn man von hinten anfängt, und das letzte Glied zuerst setzt, nemlich

$$a + (n - 1)d, a + (n - 2)d, a + (n - 3)d, a + (n - 4)d \text{ u. s. w.}$$

Ist einem nun das letzte Glied, die Anzahl der Glieder und die Differenz gegeben, so wird sich die Progression leicht endigen, und das erste, wie auch alle übrige Glieder finden lassen. Dann z. E. es seye $n = 4$, so ist $(n - 4)d = (4 - 4)d = 0$, folglich $a + (n - 4)d = a$, welches das erste Glied ist.

§. 92. Eben so ist es auch leicht, die ganze Summe einer arithmetischen Progression zu finden.

die ganze
Summe ei-
ner arith-
metischen
Progression
zu finden;

gression zu suchen. Dann weil allemal die beide äußerste, und die von den äußersten gleichweit abstehenden Glieder gleiche Summen haben, so bekäme man durch die Addition aller so beschaffener Glieder die ganze Summe richtig; folglich darf man um Zeit und Mühe zu sparen, die Summe des ersten und letzten Gliedes nur in die halbe Zahl der Glieder multipliciren; z. E. 2, 4, 6, 8, 10, 12; ist eine arithmetische Progression; dann wenn man die äußerste und von den äußersten gleichweit abstehende Glieder addirt, so hat man

$$\begin{array}{rccccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12 & \\ & & & 6 & 4 & 2 & \\ & & & \hline 14, & 14, & 14, & \end{array}$$

das ist 3 mal 14; nun ist diese Operation zu mühsam; man drückt sich daherv gerne kürzer aus. Wir sehen, daß die Progression sechs Glieder hat, und folglich durch die vorgeschriebene Addition 3 gleiche Summen gibt; folglich wollen wir die Anzahl der Glieder halbiren, und eine von den Summen, welche sich am besten dazu schickt, dadurch multipliciren. Die Summe der beyden äußersten ist die bequemste, weil der Ausdruck des ersten und letzten Gliedes so beschaffen ist, daß er auch zu einem kurzen und leicht zu behaltenden Ausdruck für die Summe den Weg bahnen kann. Da nun das erste Glied a , das letzte $a + (n - 1)d$, so wird die Summe dieser zwey Glieder seyn

$$= 2a$$

Proportionen und Progressionen. 229

$= 2a + (n-1)d$, und wenn man mit der Kurier, all-
 halben Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2} n$ multipli- gemeiner
 cirt, die Summe der ganzen Progression und schließt
 $= (2a + (n-1)d) \frac{1}{2} n = (2a + (n-1)d) \frac{n}{2}$
 $= \frac{n}{2} \cdot \frac{2an + (n^2 - n)d}{2} = an + \frac{(n^2 - n)d}{2}$ der An-
 bruch, die

folglich kann man aus dem ersten Glied, Summe et
 der Zahl der Glieder und ihrem Unterscheid Summe et
 die ganze Summe einer arithmetischen Pro- ner arith-
 gression finden. Wenn $a = 1$ und $d = 2$, metischem
 so ist die Summe $= n + (n^2 - n) \frac{2}{2} = n +$ metischem
 $n^2 - n = n^2$, oder das Quadrat der An- Progression
 zahl der Glieder. 3. E. anzuzeigen.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	$= 8^2 = 64$	Wie und
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13	$= 7^2 = 49$	warum man
1, 3, 5, 7, 9, 11	$= 6^2 = 36$	durch die
1, 3, 5, 7, 9	$= 5^2 = 25$	Addition
1, 3, 5, 7	$= 4^2 = 16$	der ungera-
1, 3, 5	$= 3^2 = 9$	den Zahlen
1, 3	$= 2^2 = 4$	alle Quadrate
1	$= 1^2 = 1$	Zahlen er- finden könn- ne, wird aus der Na- tur der arith-

Aus dieser Tabelle erhellt unter anderm, metischen
 daß alle nur mögliche Quadratzahlen, so Progressio-
 weit sie sich denken lassen, durch die Addi- nen er-
 tion der ungeraden Zahlen, das ist, der wiesen,
 Glieder einer arithmetischen Progression,
 deren erstes Glied 1, und deren Differenz
 2 ist, gefunden werden können. Wir und gezeigt,
 werden aber sogleich sehen, wie die arith- wie die a-
 metische Progressionen nicht nur ben Er- rithmetische
 findung der Quadraten, sondern auch ben Progressio-
 nen über-
 haupt einen

großen Ein-
fluß in die
geometrische
haben.

Warum man
die Exempel,
wie man aus
gewissen ge-
gebenen
Theilen ei-
ner arith-
metischen
Progression
die übrige
finden sollte,
nicht weit-
läufiger
anführe,
und wie man
nach einem
einigen Ex-
empel die
übrige leicht
berechnen
könne,

höhern Potenzen einen ungemeinen und
höchstwichtigen Einfluß in die geometrische
Progressionen haben, wenn wir von den
Logarithmen reden. Dann ich halte nicht
für nöthig, daß ich mit leichten und übers-
all vorkommenden Aufgaben, z. E. aus
der Summe und den gegebenen beeden äus-
sersten Gliedern die Differenz, aus den ge-
gebenen beeden äußersten Gliedern und
der Differenz die Summe und die Anzahl
der Glieder, aus der Differenz, der Sum-
me und der Zahl der Glieder, die beide
äußerste Glieder u. s. w. zu erfinden, mei-
ne Leser in die Länge erst noch aufhalten
solle. Wer ein Exempel berechnen kann,
wird sie alle berechnen können. Z. E. es
sey gegeben das letzte Glied $= b$, die Dif-
ferenz $= d$, die Anzahl der Glieder $= n$;
man solle das erste Glied $= x$ finden. So
ist das letzte Glied nach unserm obigen Aus-
druck $x + (n - 1)d = x + nd - d$; dieser
Ausdruck wird dem gegebenen b gleich seyn,
weil eine jede GröÙe sich selbst gleich ist.
Folglich setze ich

$$\begin{array}{l} b = x + nd - d, \quad \text{und subtrahire be-} \\ b - nd + d = x \quad \text{derselts } nd - d \end{array}$$

Hier habe ich x in lauter bekannten Zahlen;
will ich nun das zweite Glied haben, so
addire ich nur noch ein d dazu u. s. w. ver-
lange ich die Summe der ganzen Progressi-
on, so nehme ich den allgemeinen Ausdruck
der Summe

Proportionen und Progressionen. 231

$$nx + \frac{(n^2 - n)d}{2} = nx + \frac{n^2 d - nd}{2}$$

und da ich x gefunden habe, auch allemal gleiches für gleiches setzen darf, so setze ich seinen Wehrt in bekannten Grössen, da ich dann bekomme.

$$n(b - nd + d) + \frac{n^2 d - nd}{2} \quad \text{oder}$$

unter einerley Benennung

$$\frac{2n(b - nd + d) + n^2 d - nd}{2} \quad \text{und}$$

wenn man wirklich multiplicirt,

$$\frac{2nb - 2n^2 d + 2nd + n^2 d - nd}{2}, \quad \text{und}$$

wenn man aufhebet, was sich gegeneinander aufheben läßt,

$$\frac{2nb - n^2 d + nd}{2} = \frac{(2b - nd + d)n}{2}$$

Da ich dann wiederum einen andern Ausdruck für die Summe habe. Doch genug von diesem. Wer sich üben will, wird Gelegenheit genug haben, wenn er nur die geringe Grössen, die er erst erfinden will, x oder y nennet, den übrigen aber ihre alte Namen läßt.

§. 93. Jetzt reden wir von den Logarithmen, deren Erfinder gewis ein Deutscher, Namens Justus Byrge war, er mag hernach aus der Schweiz oder aus den Hessencasselischen Landen gebürtig gewesen seyn; wie ich in meinen *Amoenitatibus*

wenn man nur die unbekannte oder erst zu erfindende Grössen, nach Gewohnheit der Mathematiker, x, y, z , oder überhaupt mit den letzten Buchstaben des Alphabets benennet.

Von den Lo-
garithmen,
und ihrem
Erfinder,

was die lo-
garithmische
Rechnung
überhaupt
seye und
heisse,

wird zuerst

mit Exem-

peln in Zah-

len erläutert,

und gereicht,

daß durch

diese Rech-

nung die

Multiplica-

tion in eine

Addition,

acad. Fasc. I. mit mehrerem gezeiget. Nach ihm hat erst Johann Nepper, ein Schottländer, den Gebrauch davon gemeinnütziger gemacht, nicht aber die Sache selbst, wie einige vorgeben, erfunden. Wenn unter eine mit eins anfangende geometrische Progression eine mit Nullte anfangende arithmetische Progression so geschrieben wird, daß die Glieder der beiden Progressionen in richtiger Ordnung sich auf einander beziehen, so heißt man die Glieder der arithmetischen Progression die Logarithmen von den ihnen correspondirenden Gliedern der geometrischen Progression. J. E.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bei diesen zwei Progressionen ist 0 der Logarithmus von 1, 3 der Logarithmus von 8, 5 der Logarithmus von 32, 7 der Logarithmus von 128. u. s. w.

Durch diese Logarithmen wird nun die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, die Erhöhung zu Potenzen in eine Multiplication, und die Ausziehung der Wurzel in eine bloße Division verwandelt. J. E. man wollte wissen, wie viel 4 . 16 wäre? wenn ich die Logarithmen brauchen will, so suche ich den Logarithmus von 4, welcher 2 ist, und den von 16, welcher 4 ist; diese beiden Logarithmen addire ich zusammen, da ich dann

Proportionen und Progressionen. 239

dann die Summe 6 bekomme. Nun suche ich, was für eine Potenz in der geometrischen Progression sich darauf bezieht; sie heißt 64; also ist 64 das Product von 4. 16; die Division ferner wenn ich 128 durch 4 zu dividiren hätte, so suche ich wieder die Logarithmen von beiden Zahlen; von der zu dividiren den Zahl 128 ist der Logarithmus 7, und 2 ist es vom Divisor 4. Nun ziehe ich den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus der zu dividirenden Zahl ab, nemlich 2 von 7, da dann der Rest, dem Quotienten 32 correspondirt. Will ich 4 zur dritten Potenz erheben, so nehme ich den Logarithmus von 4, welcher 2 ist, und multiplicire ihn mit 3, weil ich die dritte Dignität verlange; das Product $3 \cdot 2 = 6$ ist der Logarithmus der gesuchten Potenz 64, welche ihm correspondirt. Wenn ich endlich die Quadratwurzel aus 64 ausziehen will, so dividire ich den Logarithmus der Zahl, nemlich 6 durch 2; da dann der Quotient 3 auf die gesuchte Quadratwurzel 8 weist. Damit diese schöne Erfindung unsern Lesern noch deutlicher gemacht werde, so wollen wir jezo zwei andere Progressionen nehmen, und hernach den allgemeinen Beweis vortragen. Es seye

geom. 1, 3, 9, 27, 81, 243

arithm. 0, 2, 4, 6, 8, 10

Nun verlangt man das Product aus 3. 27; die Logarithmen davon sind 2 und 6, ihre

P 5

Sum

in eine Subtraction,

die Erhebung zu Potenzen in eine Multiplication

und die Ausziehung der Wurzeln in eine Division verwandelt werde.

Ein anderes

Zahlen wird

angeführt.

Summe ist 8 ; dieser correspondirt 81 ; also ist 81 das Product aus 3. 27. Auf gleiche Weise bezieht sich auf 243 : 9 der logarithmische Ausdruck $10 - 4 = 6$, welche Zahl auf den Quotienten 27 weist. 3 in der fünften Dignität oder 3^5 ist logarithmisch ausgedruckt $2.5 = 10$, worauf 243

sich beziehet. Die Cubicwurzel oder $\sqrt[3]{}$ aus 27 ist logarithmisch ausgedruckt $6:3 = 2$; welcher Zahl 3 als die gesuchte Wurzel correspondirt. Man siehet also, daß es gleichgültig seye, was man für eine arithmetische Progression unter die geometrische schreibt, wenn man nur hernach bey der einmal angenommenen bleibt; welches nun auch aus dem allgemeinen Beweis noch mehr erhellen wird. Es seye demnach

Wie man die
Logarithmische
Rechnung auf eine
allgemeine
Art erweisen
und demon-
strieren könne.

geom. $1, n, n^2, n^3, n^4, n^5, n^6, n^7$ u. s. w.
arithm. $0, d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d$ u. s. w.
so wird $n^2 \cdot n^5$ logarithmisch seyn $2d + 5d = 7d$, welchem Glied n^7 correspondirt; folglich ist n^7 das Product, wie wir es im 2 Capitel §. 49. gefunden haben. $n^6 : n^2$ ist logarithmisch $6d - 2d = 4d$, folglich der darauf sich beziehende Ausdruck n^4 der wahre Quotient der gesuchten Zahl; wie wir §. 49. unabhängig von dieser Erfindung bewiesen haben. n^2 in die dritte Potenz erhoben ist logarithmisch $2d \cdot 3 = 6d$; welcher Ausdruck sich auf n^6 beziehet; also ist n^6 die dritte Dignität von n^2 , wie

ende

endlich die $\sqrt[3]{}$ aus n^6 logarithmisch $6d : 3$
 $= 2d$ uns wieder n^2 weist. Diß ist der
 Beweis der logarithmischen Regeln, wel-
 cher so faßlich vorgetragen wird, als nur
 immer möglich ist. Dann die zwei allge-
 meine Progressionen werden jedermann
 verständlich seyn. Bey der arithmetischen
 könnte man vielleicht fragen, warum wir
 nicht unsern Ausdruck der Progression aus
 §. 91. beibehalten und geschrieben haben

$a, a + d, a + 2d, a + 3d$ u. s. w.

Allein das erste Glied ist ausdrücklich $= 0$
 gesetzt worden; folglich würde die Progref-
 sion heißen müssen

$0, 0 + d, 0 + 2d, 0 + 3d$ u. s. w.

Das heißt aber eben so viel, als

$0, d, 2d, 3d, 4d$ u. s. w. Weil die Mul-

le weder vermehrt noch vermindert. Je-
 zo wird nichts mehr am ganzen Beweis
 schwer seyn. Uebrigens erhellet zugleich
 aus dem bisherigen, daß die Exponenten
 der Größen wirklich als ihre Logarithmen
 angesehen werden können; wie dann aus
 dieser Aehnlichkeit der Herr Baron von
 Wolff die ganze Lehre von der Multipli-
 cation und Division der Potenzen u. s. w.
 hergeleitet und erwiesen hat.

Warum in
 dem angebe-
 nen Beweis
 der allgemei-
 ne Ausdruck
 der arithme-
 tischen Pro-
 gressionen in
 etwas abge-
 ändert seye.

Die Exponen-
 ten der Dis-
 gnitäten könn-
 en als ihre
 Logarithmen
 angesehen
 werden, wie
 deswegen Hr
 Baron von
 Wolff aus
 der Natur der
 Logarithmen
 die Multipli-
 cation u. Di-
 vision der Po-
 tenzen herge-
 leitet hat.

§. 94. Allein unsre Leser können mit
 Recht noch einen andern Anstand haben,

und uns die Einwendung machen, wir
 haben wohl die Logarithmen von einer
 Progression überhaupt gefunden, aber für die zwei
 noch

Ob und wie
 man auch Lo-
 garithmen

sehen die
Glieder der
geometri-
schen Propor-
tion fallende
Zahlen finden
können,

Allgemeine
Beantwor-
tung dieser
Frage.

Besondere
Auflösung
und Antwort,
daß man die

noch nicht gezeigt, ob und wie man auch die Logarithmen der zwischen die Glieder fallenden Zahlen finden könne? z. E. zwischen 2 und 4 fällt 3; davon hat man noch keinen Logarithmus; zwischen 4 und 8 fallen 5, 6, 7, auch davon fehlen die Logarithmen u. s. w. folglich fragt man jezo, ob diese Zahlen gar keine Logarithmen haben, oder wenn sie solche haben, wie sie gefunden werden? Diese Frage verdienet vorzüglich beantwortet zu werden. Wir wollen eine allgemeine Auflösung vorläufig sagen, ehe wir die besondere Art, die Logarithmen der Zwischenzahlen zu finden, anführen. Man sucht zwischen zwey gegebenen Gliedern, z. E. zwischen 2 und 4, so viel mittlere Proportionalzahlen, mit den ihnen correspondirenden Logarithmen, bis man endlich eine findet, welche der Zahl 3 entweder ganz gleich oder am nächsten kommt; da man dann den dazu gehörigen Logarithmus auch sucht und darunter schreibt. Nun sieht man wohl, daß man die Zwischenglieder und ihre Logarithmen nicht so accurat finden könne; daher hilft man sich mit Brüchen von grossen Nennern, damit der Fehler so klein werde, als immer möglich ist, und oft kaum ein Milliontheil betrage. Diß ist die allgemeine Antwort. Die besondere wird nun auch faßlich seyn. Man hat die geometrische Decimalprogression von 1, 10, 100 u. s. w. an-

angenommen; und unter diese die in nat. geometrischer
tücklicher Ordnung fortgehende und von den 1, 10, 100,
Nullen anfangende Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 1000, u. s. w.
4, 5 u. s. w. geschrieben. Z. E. angenommen
und nach dem

Geom. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, and nach dem Proportionen.

Arisbn. 0, 1, 2, 3, 4, 5, regeln die
Ordnung

Also ist der Logarithmus von 1, e, von ^{Zwischen-} Glieder suchen

10, 1, von 100, 2 u. s. w. Zwischen 1

und 10 sucht man die mittlere geometris

sche Proportionalzahl; zwischen der ges

fundenen und zehn abermal die mittlere

a. s. w. bis man endlich eine gefunden,

die 9 am nächsten ist. Eben so suchet ^{warum man} die Glieder

man zugleich zwischen 0 und 1 die mittlere nicht accurat

arithmetische Proportionalzahl, und fährt ^{weiter} finden könne,

mit dieser Operation so lange fort, bis

man das dem Meurer correspondirende

oder am nächsten kommende arithmetische

Glied gefunden hat, welches hernach sein wie man aber

Logarithmus ist. Damit nun der Fehler nach mittel

kleiner werde als ein Milliontheilgen, so

hängt man dem Eifer und dem 10. Sieben habe, dem

Rußen an: 1. 1.000.000, 10.000.000, Reblen so an

moderisch angezeigt wird, daß beide Zah-

len einen Menner haben = 1000000; eing und

dann $1 = 1,00000000$ und $10 =$ klein zu ma

1,000,000.00

1.00000000 open, als ung

10,000,000; damit man aber nicht so immer müde

10000000

viel schreiben darf, so laßt man den Dien-
stmann weiß, daß er auf dem Finken und auf dem

ner weg, weil der nach dem Eisner und und wie die

Zehner angehängte Punkt, der sonst auch ^{hier} fest durch ~~das~~

Die

abhängte die Characteristik genannt wird, von Nullen und selbst den Nenner durch die folgende Decimalbrüche Nullen angezeigt, den man im Sinn hinzudenken muß. Zwischen diesen zwey Gliedern suchet man nun, wie schon gemeldet wurde, die mittlere geometrische Proportionalzahl, u. s. w. bis man auf neune kommt. Eben so macht man es mit der arithmetischen Progression, deren Gliedern gleichfalls sieben Nullen angeschlossen werden. Dann $\frac{0.0000000}{10000000} = 0,$

$$\text{und } \frac{1.0000000}{10000000} = 1. \quad \text{Man läßt daher}$$

abermal, um das Schreiben zu verkürzen, den Nenner hinweg, und sucht zwischen dem ersten und zweyten Glied die mittlere arithmetische Proportionalzahl, u. s. w. bis man die findet, die dem Nenner mit seinen sieben Nullen in der geometrischen Progression correspondirt. Nach dieser Operation sucht man zwischen 1 und 9 die mittlere Proportionalzahl u. s. w. auf gleiche Weise, bis man den Achter bekommt u. s. w. Nun können wir es unsern Lesern nicht verargen, wenn sie sagen, das seye die verdrüßlichste Arbeit von der Welt. Allein wir legen ihnen ja diese Arbeit nicht auf, und fordern nicht einmal ein einiges Exempel von ihnen, das sie berechnen sollten, vielweniger alle. Sie sind längstens berechnet, und es haben

warum einen diese verdrüßliche und mühsame Rechnung nicht ersparen dürfe,

Proportionen und Progressionen. 239

ben sich Leute, welche zu solchen mühsamen Arbeiten gleichsam gebohren werden muß, und wie in sen, entschlossen, Jahr und Tag an einem fort zu rechnen, und ihre Rechnungen durch den Druck gemeinnützig zu machen. Das sind die sogenannte Tabulae Sinuum & Tangentium, wo nicht nur für die Zahlen, sondern auch für die Linien, die man Sinus und Tangenten nennet, alle nöthige Logarithmen berechnet sind, und von denen, die was logarithmisch auflösen wollen, nur erkaufte und nachgeschlagen werden dürfen. Nun ist leicht begreiflich, daß einem Buch von lauter Zahlen in Ab- sicht auf seine Richtigkeit nicht allemal zu trauen sey. Doch darf man eines von diesen den Lesern vorzüglich anpreisen, nemlich das Blacquische, welches das correcteste seyn solle. Warum man übrigens die Decimalprogression 1, 10, 100, 1000 u. s. w. angenommen und allen übrigen bey dieser Arbeit vorgezogen habe, ist aus dem gro- ßen Vortheil der Decimalbrüche leicht zu verstehen. Eine Rechnung, wo lauter Decimalbrüche vorkommen, macht nicht halb so viel Mühe, als eine andere; und läßt sich auch neben dem weit kürzer ausdrucken. Dann wenn ich z. E. die Progression $3 + \frac{4}{10} + \frac{20}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ habe, so heißt sie so viel als der einige Bruch $\frac{342857}{100000}$, oder, wenn ich den Nenner gar weglasse 3.42857; in

den sogenann-
ten Logarith-
mischen Tafeln
alles schon
vorgebracht
und zum
voraus be-
rechnet seye;
welche Tafeln
für die
correcteste
gehalten
werden.
Warum man
in dieser Ar-
beit die De-
cimalpro-
gression von
1, 10, 100 u.
s. w. vorzüg-
lich erwehlt
habe.

welchem Fall die Zahlen nach dem Punkt, oder nach der Characteristik 3, Decimalfractionen anzeigen, oder Zehler von Nennern sind, die in der Decimalprogression fortgehen, oder deren gemeinschaftlicher Nenner so viel Nullen hat, als der ganze Zehler Zahlzeichen hat. Der Beweis davon ist leicht, wenn man nur die angeführte Brüche nach der Hauptregel unter einerley Benennung bringt. Wir werden aber bey Ausziehung der Wurzeln das weitere von den Vortheilen der Decimalbrüche sagen.

Dem Ge-
brauch der
Logarith-
men in der
Buchstaben-
rechnung,
und wie man
sich hier noch
fürter aus-
drücken kön-
ne.

Beweis der
logarithmi-

§. 95. Wir haben alles, was von den Logarithmen zu wissen nöthig ist, umständlich vorgetragen. Eines ist noch übrig, daß wir nemlich auch zeigen, wie man in der allgemeinen Buchstabenrechnung sich der Logarithmen bedienet. Wir wollen die Logarithme mit dem Buchstaben l ausdrücken und z. E. sagen, der Logarithmus von a seye la , der Logarithmus von b seye lb , der Logarithmus von y seye ly u. s. w. Wenn wir demnach das Product abx logarithmisch ausdrücken wollten, so müßte es heißen $la + lb + lx$, weil wir wissen, daß die Multiplication durch die logarithmische Rechnung in eine Addition verwandelt wird §. 93. und weil die Division eine Subtraction wird, so wird der Ausdruck $\frac{ax}{y}$ logarithmisch heißen $(la + lx) - ly$,

— ly ,

Proportionen und Progressionen. 241

—ly, der Ausdruck $\frac{b}{a} = lb - la$ u. s. w. schen Ausdrücke für

In Rücksicht auf die Wurzel und Dignität: alle Fälle, die
täten dürfen wir auch die allgemeine Reche- sowohl bey
nung brauchen; dann weil x^2 logarithmisch der Multipli-
 $2x$, und x^5 , $5lx$, und x^n , nly u. s. w. cation und
heißt, so werden sich auch schwerere Ausdrücke bald geben; z. E. a^{n-2} wird loga- Division, als
rithmisch heißen $nla - 2la$; dann gesetzt n Potenzen
seye 5, so hiesse der Ausdruck a^{5-2} in der auch bey den
logarithmischen Rechnung $5la - 2la = 3la$.
Da nun a^3 logarithmisch $3la$ heißt, so ist und Wurzeln
der obige Ausdruck a^{5-2} durch die loga- vorkommen,
rithme $5la - 2la$, und der allgemeine a^{n-2}
durch die Logarithme $nla - 2la$ richtig ge-
geben worden. Eben dieses läßt sich auch
aus der allgemeinen Divisionsregel erwei-
sen. Dann weil $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$, 5. 57. und

die Logarithmen die Division in eine Sub-
traction verwandeln, so muß der logarith-
mische Ausdruck heißen $na - 2la$. Diese
Ausdrücke muß man sich wohl bekannt ma-
chen. Wir wollen noch andere Exempel
vorschreiben. Der Ausdruck $bx^{-1}xy$ heißt
logarithmisch $nlb - lb + lx + ly$; der Aus-
druck $a^{n-2}bx^{-2}y$ heißt logarithmisch $nla +$
 $2lb - 2lb + ly$; der Ausdruck $x^2y^{n-4}a$
heißt logarithmisch $2lx + nly - 4ly + la$.
u. s. w. Mit den Wurzeln hat es eine glei-
che Beschaffenheit. Z. E. $\sqrt[n]{n^3} = n^{\frac{3}{n}}$ ist
loga

logarithmisch $\frac{3}{4} \ln$ oder $\frac{3}{4} \ln$, $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

ist logarithmisch $\frac{2}{7} \ln$ u. s. w. Den Vortheil von diesen Ausdrücken wollen wir jezo in einigen Exempeln zeigen.

Anwendung
der logarith-
mischen
Rechnung auf
ein Exempel.
wenn man die
Anzahl der
Glieder einer
geometrischen
Progression
finden
sollte.

§. 96. Man solle in einer geometrischen Progression aus dem gegebenen ersten und letzten Glied und dem Nahmen der Verhältniß oder dem Exponenten, die Zahl der Glieder finden. Dieses Exempel wird uns schon von dem Nutzen der logarithmischen Ausdrücke überzeugen können. Es seye demnach das letzte Glied $= b$.
und das erste $= a$.
der Name der Verhältniß oder
der Exponent $= m$.
und die gesuchte Anzahl der
Glieder $= x$.

So ist nach §. 85. das letzte Glied, anders ausgedrückt, $m^{x-1}a = b$; das ist, nach logarithmischen Ausdrücken §. 95.

$$x \ln m - \ln m + \ln a = \ln b. \quad \text{Folglich §. 9.}$$

$$x \ln m - \ln m = \ln b - \ln a \quad \text{und weil}$$

$$\ln m = \ln m \quad \text{§. 9.}$$

$$x \ln m = \ln b - \ln a + \ln m \quad \text{mithin}$$

$$\text{-----} : \ln m$$

$$x = \frac{\ln b - \ln a + \ln m}{\ln m} \quad \text{das ist nach §. 60.}$$

schicklicher ausgedrückt

$$x = \left(\frac{\ln b - \ln a}{\ln m} \right) + 1.$$

Wenn

Proportionen und Progressionen. 243

Wenn nun a , b und m in Zahlen gegeben sind, so schlägt man in den logarithmischen Tabellen die Logarithmen davon auf, zieht den Logarithmus des ersten Glieds von dem Logarithmus des letzten Gliedes ab, dividirt hernach die Differenz durch den Logarithmus des Exponenten, und addirt zum Quotienten noch eins, damit die Anzahl der Glieder nach der vorgeschriebenen Formel herauskomme. Dieses Exempel wird hinlänglich seyn, unsern Lesern ein Kennniß von dem Gebrauch der Logarithmen in der Buchstabenrechnung bezubringen, und sie von dem grossen Wehrt dieser Erfindung zu überzeugen. Wollen sie noch etwas zum Lobe des Erfinders hinzudenken, so ist es dieses, daß sie durch diese Rechnung nicht nur des weitläufigen Multiplicirens und Dividirens, sondern auch der so beschwerlichen Ausziehung der Wurzeln, besonders aus höhern Dignitäten gänzlich überhoben werden. Dahero man allerdings auch nebenher denenjenigen Arbeitern, welche uns durch wirkliche Berechnung der Logarithmen für die correspondirende Zahlzeichen vorgeschaffet haben, einen wahren Dank abzustatten hat.

§. 97. Die Lehre von den Proportionen und Progressionen ist nunmehr nach ihrem ganzen Umfang vorgetragen worden. Es gibt aber noch verschiedene sogenannte Nebenproportionen und Progressionen, welche wir unserm Vorhaben

gemäß kürzlich anzeigen, weil sie aber von keinem so grossen Gewichte und Nutzen sind, als die bisherige, nicht ausführlich vortragen werden. Hieher rechnen wir die harmonische und contraharmonische Proportionen, die Pronizahlen, wie auch die sogenannte Polygonal- und Pyramidalzahlen. Eine harmonische Proportion entsteht, wenn die Differenz des ersten und zweiten Gliedes sich zur Differenz des dritten und vierten verhält, wie das erste Glied sich zum vierten verhält.

nemlich der
harmonis-
chen,

Ist das zweite Glied dem dritten gleich, so ist von selbst klar, daß in diesem Fall die Differenz des ersten und zweiten sich zur Differenz des zweiten und dritten verhalte, wie das erste zum dritten. Z. E. 10, 16, 40 sind drey harmonische Proportionalzahlen; dann die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Glied $16 - 10 = 6$, und die Differenz zwischen dem zweiten und dritten Glied $40 - 16 = 24$, verhalten sich zu einander wie das erste zu dem letzten Glied, oder wie 10 zu 40; weil

$$6 : 24 = 10 : 40.$$

und contra-
harmonis-
chen Pro-
portionen,

Die contraharmonische Proportion ist gerade umgekehrt; dann bey dieser verhält sich die Differenz der zwey ersten Glieder zur Differenz der zwey folgenden, wie das letzte Glied zum ersten sich verhält. Z. E. 3, 5, 6 sind drey contraharmonische Glieder, weil sich verhält $3 - 5 = 2$ zu $6 -$

$$5 = 1$$

Proportionen und Progressionen. 245

5 = 1 wie 6 zu 3. Sollte also aus zwei gegebenen Gliedern a und b in einer harmonischen Proportion das dritte x gefunden werden; so heißt die Proportion:

$$b - a : x - b = a : x \quad \text{folglich}$$

$$bx - ax = ax - ab \quad \text{und §. 9.}$$

$$bx = 2ax - ab \quad \text{ferner}$$

$$ab + bx = 2ax, \quad \text{und}$$

$$ab = 2ax - bx, \quad \text{das ist §. 60.}$$

$$ab = (2a - b)x \quad \text{folglich}$$

$$\text{-----} : 2a - b$$

$$\frac{ab}{2a - b} = x.$$

Die contraharmonische dritte Proportionalkzahl läßt sich eben so finden, nur muß man die Auflösung noch auf das folgende Capitel versparen, weil eine unreine quadratische Gleichung dabei vorkommt, wovon wir erst im fünften Capitel handeln werden. Uebrigens siehet man schon, daß es, wann man mehr Glieder auf gleiche Art suchen, harmonische und contraharmonische Progressionen geben werde, und daß überhaupt diese ganze Lehre keine neue Hauptgattung der Proportionen ausmache.

§. 98. Was die Pronikzahlen betrifft, ^{der sogenannten Pronikzahlen,} so bestehet die ganze Wissenschaft davon darinnen, daß man die Summe eines Quadrats und seiner Wurzel eine Pronikzahl nennt; folglich ist $n^2 + n$, oder $a^2 + a$ eine sogenannte Pronikzahl; oder

Q 3

in

in wirklichen Zahlzeichen sind $4 + 2, 9 + 3, 16 + 4, 25 + 5$, das ist, 6, 12, 20, 30 u. s. w. wirkliche Pronizahlen; weil wir die unreine quadratische Gleichungen noch nicht erklärer, so können wir auch bey diesen Grössen noch nicht ausführlich zeigen, wie ihre Wurzeln gefunden werden. Polygonalzahlen sind diejenige Zahlen, welche durch die Addition der Glieder in einer arithmetischen Progression, die mit Eins anfängt, entstehen, z. E.

I.	{ arithm. Progr.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
	{ polng. Zahlen	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,
II.	{ arithm.	1, 3, 5, 6, 9, 11, 13,
	{ polngon.	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49
III.	{ arithm.	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19,
	{ polngon.	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70

nebst einer Erklärung vom Ursprung ihres Namens. Weil das zweite Glied in der ersten Classe der Polygonalzahlen 3 ist, so heisst man sie Trigonal; oder Triangularzahlen; aus gleichem Grunde werden die in der zweiten Classe Quadrangularzahlen, die in der dritten Pentagonalzahlen u. s. w. genannt. Ihren Namen haben sie von den geometrischen Figuren, daraus sie entstehen können, erhalten. Darum heisst das zweite Glied in einer Polygonalzahl die Anzahl der Winkel, welche anzeigt, wie viel diejenige geometrische Figur Winkel habe, mit welcher die Polygonalzahl eine Aehnlichkeit hat, oder woraus sie entstehen könnte. Die Seite des Polygons

Proportionen und Progressionen. 247

gons hingegen ist die Anzahl der Glieder der arithmetischen Progression, aus deren Summe die gegebene Polygonalzah! erwachsen ist. Wie man nun daraus die Polygonalzah! u. s. w. finden könne, ist leicht begreiflich. Die Sache aber selbst ist von keinem so grossen Gewichte, und kommt in der ganzen Mathematik gar selten vor; daher wir unsern Leser nicht damit aufhalten wollen. Ein gleiches müssen wir von den Pyramidalzahlen sagen; der Pyramis diese entstehen, wenn man Polygonalzah! addirt. dazahlen

3. E.
 Polygon. Triang. 1, 3, 6, 10, 15, 21. u. s. w.
 Pyramid. 1, 4, 10, 20, 35, 56.

Wenn nun diese wieder aufs neue addirt werden, so heissen die herauskommende Glieder Pyramidalzahlen von höhern Gattungen u. s. w. Unsere Leser begreifen von selbst, daß man noch viele Veränderungen mit den Zahlen vornehmen, und für eine jede Veränderung neue Nahmen ausfindig machen könne. Da wir nun die fruchtbarste, gemeinnützigste und nöthigste Veränderung in Rücksicht auf die Proportio- Warum man
 nen und Progressionen gesagt haben, so nicht so weit-
 wollen wir jezo zum Beschluß eilen, und läuft davon
 ihre Gedult mit keinen weder neuen noch handle.
 alten Zahlnahmen, dahin auch die gerade und ungerade, ferner die Primzahlen und andere gehören, in die Länge mehr ermüden. Wenn man nur das, was von den geo-

metrischen Proportionen vorgetragen worden ist, dem Gemüthe wohl eintrüfft, so wird man im folgenden leicht fortkommen; dann die Lehre von den Proportionen ist gleichsam die Seele der ganzen Mathematik.

Was die §. 99. Den Beschluß dieses Capitels
Combina- machen wir mit den Combinations: Re-
tions-Regeln geln, kraft welcher man eine gegebene An-
setzen, zahl Buchstaben, Wörter, Namen oder
wie oft eine Personen so oft versetzen solle, als es mög-
gegebene An- lich ist. Wir nehmen zuerst zween Buch-
zahl Buch- staben a und b ; diese lassen sich 2 mal verset-
staben ver- zen. Denn entweder sage ich ab oder ba ; eh-
seit werden ne dritte Versetzung ist nicht möglich. Hern-
können, nach versuche ich es mit dreyn; oder ich neh-
 me den Buchstaben c dazu; dessen Verset-
 zung suche ich zuerst mit ab , da es dann heisset

$$cab$$

$$acb$$

$$abc$$

Weiter oder mehrmalen läßt er sich nicht versetzen. Hernach combinire ich ihn mit ba , da ich wieder dreyn Versetzungen bekomme, nemlich

$$cba$$

$$bca$$

$$bac,$$

Auflösung

und also in allem sechs. Wenn ich nun den
Beweis. vierten Buchstaben d dazu nehme, so muß ich ihn mit einem jeden von den gefundenen sechs Ausdrücken verbinden; da er sich dann mit einem jeden viermal verbind-

den

Proportionen und Progressionen. 249

ten läßt, z. E. mit dem ersten cab , kann
 und viermal verbinden, daß herauskommt

1) $dcab$

2) $cdab$

3) $cadb$

4) $cabd$

den so vielmal läßt sich dieser Buchstab
 mit einem jeden der folgenden Ausdrücke
 verbinden; folglich lassen sich 4 Buchstaben
 6. 4 mal, das ist 24 mal versetzen.
 Nun habe ich schon eine Regel, nach welcher
 die übrigen Verbindungen sich richten
 werden. Dann zwey lassen sich zweymal,
 drey sechsmal, vier vier und zwanzigmal,
 das ist, 2 lassen sich 2. 1. drey lassen sich
 3. 2. 1, und 4 lassen sich 4. 3. 2. 1 verset-
 zen. Folglich werden fünfe 5. 4. 3. 2. 1
 und sechse 6. 5. 4. 3. 2. 1 mal sich verset-
 zen lassen. Wann also die Anzahl der
 Buchstaben n ist; so wird die Anzahl der
 Veränderungen seyn $n. n - 1, n - 2.$
 $n - 3. n - 4. n - 5$ u. s. w. Ist mir
 nun n in endlichen Zahlen gegeben, so
 wird es zuletzt $= 1$ werden, folglich das
 Product sich endigen. Wenn also 12 Pers-
 onen an einer Tafel sitzen, so kann man
 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 mal, das
 ist, viele Millionen mal mit ihnen abwech-
 seln. Eben hieraus siehet man, wie oft sich
 die sämtliche Buchstaben des Alphabets, die
 einßylbige Wörter in einem Vers u. s. w.
 versetzen lassen. Es gibt zwar noch verschiede-

bene Fälle bey dieser Combinations-Regel.
 3. E wenn einige Buchstaben doppelt oder
 drehmal u. s. w. vorkommen, in welchem
 Fall man das Product wiederum dividiren
 muß. Dann es solle a allein gegeben seyn,
 so hat man, wenn a doppelt vorkommt,
 eben den einigen Ausdruck aa ; kommt b noch
 dazu, so heißt es baa , aba , und aab ; kommt
 Was für Ne- c noch dazu, so läßt es sich mit einem jeden
 benfragen der drey gefundenen Ausdrücke, wie oben
 bey dieser 4mal verbinden; folglich gibt es 12 Verbind-
 Regel vor- dungen. Demnach jedesmal nur halb so
 kommen viel, als bey der Verbindung von 4 zerschie-
 können, und den Buchstaben. Die Regel heißt mich
 wie sie be- also in diesem Fall das obige Product mit
 antwortet 2 dividiren. Die Anzahl der Verset-
 werden. Ausdrück seyn $n.n - 1.n - 2.n - 3$ u. s. w.,

$$\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

Eben so kann man eine Regel finden,
 wenn ein Buchstab drehmal vorkäme, da
 denn der Divisor heißen wird 3. 2. 1. u. s. w.
 Aus dem bisherigen siehet man schon, daß
 sich allerhand Fälle bestimmen und unter
 gewisse Regeln bringen lassen. Dahin
 gehört auch die Combination der Zahlzei-
 chen nach der Decimalprogression, wie wir
 im ersten Capitel vorläufig gemeldet haben.
 3. E es ist die Frage, wie oft neun Zahl-
 zeichen mit einander so verbunden werden
 können, daß allemal je zwey und zwey zu-
 same

Proportionen und Progressionen. 251

sammen kommen, und jedes derselben 2 mal zu sich selbst gesetzt werde. Die Auflösung wird sich leicht geben, wenn ich zuerst mit 2 Buchstaben es versuche. a und b seyen die Buchstaben. Folglich wird nach der Regel die Verbindung herauskommen:

aa, ab

bb, ba

Weitere Versetzungen von dieser Gattung gibt es nicht. Die Combination ist also von 2 Buchstaben nach der gegebenen Regel 4 mal möglich. Nehmen wir drey, nemlich a, b, c , so ist ausser

aa, ab, ac

bb, ba, bc

cc, ca, cb

keine weitere regelmäßige Versetzung mehr möglich. Demnach geben 3 Buchstaben 9 solche Versetzungen. Eben so wird man finden, daß 4 Buchstaben 16 Versetzungen geben u. s. w. Folglich allemal das Quadrat von der Anzahl der gegebenen Buchstaben. Wenn also die Anzahl der Buchstaben n , so ist die Anzahl der Versetzungen n^2 ; und bey den 9 Buchstaben ist die Anzahl der Versetzungen nach der gegebenen Regel 81 das Quadrat von neun. Diese Regel hält ihre Probe. Wir wissen, daß wir von 10 bis 100, 90 Versetzungen der Buchstaben haben; unter diesen 90 Verbindungen sind neune mit 0 verbunden, nemlich 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Diese

Warum man

von zehn

nicht weiter

als bis hundert

bert in der

Decimalpro-

gression die

Zahlen mit

zwey Buchstaben

schreiben

könnne,

bey 100 schon

drey Buchstaben

mit ein-

ander ver-

binden müsse,

Diese 9 von 90 abgezogen lassen gerade 81, die Anzahl der Verbindungen von den Zahlzeichen selbst. Eben so kann man eine Regel von 100 bis 1000 finden; da nemlich jedes Zahlzeichen 3mal vorkommt, und die Verbindung dreysach ist; u. s. w. Auf gleiche Weise lassen sich alle mögliche Wörter in einer Sprache bestimmen, wann es der Mühe werth wäre, diese Sache zu untersuchen; dann die Arbeit wäre in der That mühsam, weil man wegen den mancherley Combinationen, da es Wörter aus 2, 3, 4, 5 und mehr Buchstaben gibt, auch wegen den gehörigen Vocalen, die ein jedes Wort haben muß, allzuviel Nebenbestimmungen der Regel geben würde. In meis-

Ob man fin-
den könne,
wie viel Wör-
ter in einer
Sprache
möglich
seyen.

Wie die Pro-
gress on der
Versetzungen
fortgehe,
wenn je drey
und drey
Buchstaben
verbunden
werden, und
warum z. E.
in der Ver-
nunftlehre
nicht weiter
als 64 so ge-
nannte modi
oder Verset-
zungen der
Buchstaben
A, E, I, O,
möglich
seyen.

nen Princip. cogitanti habe ich §. 516. gezeigt, wie man die vier Buchstaben A, E, I, O, 64mal versehen könne, daß allemal drey und drey zusammen kommen, und jeder Buchstabe dreymal, zweymal und einmal in einer Combination gesetzt werde. Auch dieses gründet sich auf die Combination's Regel; dann man nehme zwey Buchstaben a und b, so wird man nach dieser Regel 8 Versetzungen haben, nemlich

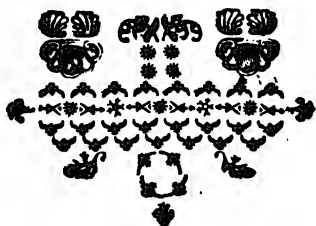
aaa, aab, aba, abb,
bbb, bba, bab, baa.

Drey Buchstaben a, b, c, werden 27 Versetzungen geben, 4 geben 64 u. s. w. Folglich läßt sich eine allgemeine Regel auch für diese Combinationen bestimmen; dann weil

Proportionen und Progressionen. 253

weil 8 der Cubus ist von 2, 27 der Cubus von 3, 64 der Cubus von 4, so wird die Anzahl der Versetzung nach den Cubiczahlen fortgehen; und 3. E. fünf Buchstaben sich 5. 5. 5 mal oder 125 mal, 6 Buchstaben 6. 6. 6 oder 216 mal, und n , Buchstaben $n. n. n$ mal n^3 mal nach der letzten Aufgabe versetzen lassen. Doch genug von diesem. Wir haben unsern Lesern schon einen Fingerzeig gegeben, wie sie auch in dieser Kunst zu erfinden sich üben können. Wir eilen zu dem folgenden Capitel, und tragen nunmehr auch die wichtige und schöne Lehre von der wirklichen Ausziehung der Wurzeln, nebst ihrer Verhältniß zu den Potenzen vollends vor, damit wir hernach die allgemeine und besondere Arithmetik zugleich beschließen und zu Ende bringen können.

Beßluß
dieses
Capitels.



V. Cap.

Von wirklicher Ausziehung der Wurzeln, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, wie auch von den algebraischen Aufgaben.

§. 100.

Warum man **W**ir haben umständlich erzählt, was Wurzeln und Potenzen seyn, das von Auszie- hero wir unsere Leser auf die schon erklärte hung der Nahmen und Ausdrücke blos zurückwei Wurzeln be. sen, und uns durch Wiederholung der C. II. vorgetragenen Lehre in keine unnö- sonders noch thige Weitläufigkeit einlassen dürfen. handle, und Weil aber zwischen der blossen Anzeige ei- was für ein ner Wurzel und zwischen der wirklichen Unterschied Ausziehung derselben ein grosser Unters- zwischen ib- chied beobachtet wird, so können unsere rer Anzeige ihnen eine Anweisung geben, wie sie die Wurzeln von allen nur möglichen Potens- und wirkli- zen wirklich ausziehen sollen. Dieser Ab- theil Auszie- heit ist nun das gegenwärtige Capitel ge- hung über, wiewiedmet, in welchem wir zeigen werden, wie die blos angezeigte Wurzeln z. E. ⁿ $\sqrt[n]{ax}$ oder $\sqrt[n]{5}$ oder $\sqrt[n]{x^my}$ u. s. w. in wirk- lichen bestimmten Grössen, wenn sie auch unendliche Ketten geben sollten, ausgedruckt werden können. Da nun leicht begreifs

greiflich, daß manche Ausdrücke von der letztern Gattung vorkommen werden, - so müssen wir diejenige Wurzeln, die in endlichen Zahlen sich ganz ausdrücken lassen, von den andern, die eine unendliche lan- ge Reihe von Brüchen geben, auch dem Rahmen nach unterscheiden; jene heißt man deswegen Rational:Größen, diese aber Irrational:Größen. Bei diesem letztern Rahmen müssen diejenige, welche gern alles deutsch geben wollen, sich hü- ten, daß sie ihn nicht durch unvernünfti- ge Größen übersehen. Dann wie im lateinischen Rationator ein guter Rechenmeister heißt, so wird eine Rational:Größe diejenige seyn, die sich durch eine bestimmte Rechnung ausdrücken läßt; folglich ist eine Irrationalgröße, welche man durch die gewöhnliche Rechenkunst nicht genau finden kann. So ist $\sqrt{4}$ eine Rationalgröße; dann sie ist dem Ausdruck 2 vollkommen und aufs genaueste gleich. Hingegen $\sqrt{2}$ ist eine Irrationalgröße, weil ich die Wurzel in wirklichen Zahlen nicht genau geben kann, es sey dann, daß ich meine Arbeit in das unendliche fortsetze; diß aber ist einem endlichen Geschöpfe unmöglich. Eben so gibt es auch eingebildete Wurzeln, (radices imaginariae,) u. s. w. von denen wir im folgenden das nöthigste sagen werden.

Warum man §. 101. Das erste Geschäft besteht
 zuerst von also darinnen, daß wir die Wurzeln wirk-
 Ausziehung jedesmal das leichtere zuerst vorgetragen,
 der Quadrat ehe wir zu den schwerern Aufgaben uns
 wurzeln gewendet. Eine gleiche Sorgfalt beobach-
 handle. ten wir bey Ausziehung der Wurzeln.
 Nun lassen sich die sogenannte Quadrats-
 wurzeln am leichtesten vor allen andern
 ausziehen. Darum wollen wir mit dies-
 sen den Anfang machen. Wenn ich eine
 Ursprung GröÙe mit sich selbst multiplicire, so heißt
 des Qua- das Product ein Quadrat, weil es in der
 mens der Geometrie ein wirkliches Quadrat gibt.
 Quadrat Darum wird die mit sich selbst multiplicir-
 wurzeln te Zahl, oder in der Geometrie die mit sich
 selbst multiplicirte Linie, als eine Linie, in
 Rücksicht auf ihr Product, die Quadrats-
 wurzel genannt. Wie man sie durch bloÙe
 Zeichen ausdrücke, ist schon bekannt;
 Es ist also die Frage noch übrig, wie man
 sie in wirklichen Zahlen finden solle; und
 diese müssen wir jezo beantworten. Eine
 Quadratzahl, das ist, die zweite Dignität
 oder Potenz einer GröÙe, entstehet, wenn
 man eine GröÙe mit sich selbst multiplicirt;
 nun kann die gegebene GröÙe entweder
 aus einem Glied oder aus mehrern Glie-
 dern bestehen, das ist, sie kann entweder
 einfach oder zusammengesetzt seyn, folglich
 a oder $a + b$ u. s. w. heißen. Heißt sie a
 allein, so ist ihr Quadrat oder ihre zweite
 Pot

Eine Qua-
 dratwurzel
 kann entwe-
 der aus ei-
 nem oder
 aus mehrern
 Gliedern be-
 stehen.

Potenz a^2 ; folglich ist a die Quadratwurzel von dem Quadrat a^2 ; das hat keine Schwierigkeit. Heißt sie aber $a + b$, so muß man das Quadrat oder die zweite Potenz erst durch die Multiplication suchen; da dann $a + b$ die Quadratwurzel von $(a + b)^2$ seyn wird. Das Quadrat selbst wird ohne sonderliche Mühe gefunden. Man multiplicirt eben $a + b$ mit sich selbst, da dann herauskommt

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{array}$$

Allgemeiner Ausdruck des wirklichen Quadrate, deren Wurzeln aus zwey Gliedern bestehen.

Demnach bestehet das Quadrat einer Wurzel von zwey Gliedern, welche man eine binomische Wurzel nennet, aus dem Quadrat des ersten Gliedes, (a^2 .) ferner aus dem Quadrat des andern Gliedes (b^2 .) und aus dem doppelten Product der beeden Glieder ($2ab$). Dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle Quadrate; dann entweder bestehet die Wurzel aus wenigern oder aus mehr Gliedern. Besteht sie aus wenigern, so kann sie allemal in zwey Glieder vertheilt werden. Z. E.

$3 = 2 + 1$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ u. s. w. Besteht sie aus mehrern, so läßt sie sich auf zwey reduciren; dann $a + b + c$, $= (a + b) + c$; oder in Zahlen $324 =$

Warum dieser Ausdruck für alle mögliche Quadrate auch von mehrern und wenigern Gliedern sich schicken; und wie eine jede einfache Wurzel in zwey Glieder

258 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

vertheilt, und $300 + 20 + 4 = 320 + 4$. u. s. w. Hiera
 eine von aus ist klar, daß der Ausdruck $a^2 + 2ab$
 mehr Gliedern aufzwey $+ b^2$ alle mögliche Quadratzahlen bedeu-
 reducirt wer- ten könne. Wenn ich also eine Quadrat-
 den könne. wurzel ausziehen will, so muß ich eine Zahl

Wie man in
 Buchstaben
 die Quadrat-
 wurzel wirk-
 lich ausziehe,

Weiß ich nun die Kunst, aus $a^2 + 2ab + b^2$
 die Quadratwurzel auszuziehen, so werde
 ich eine allgemeine Regel wissen, wornach
 ich mich in Ausziehung aller Quadratwur-
 zeln richten kann. Ich will es dahero ver-
 suchen, und die Wurzel aus dem obigen
 Ausdruck wirklich ausziehen. Die Wur-
 zel von a^2 ist a , dann a mit a multiplicirt
 gibt aa ; wie finde ich aber b , das andere
 Glied der Wurzel? Ich setze in dem fun-
 damental: Ausdruck, daß $2ab = 2a \cdot b$;

Auflösung

und

Beweis.

folglich auch, daß $b = \frac{2a \cdot b}{2a}$ Das zweyte

Glied der Wurzel wird also gefunden, wenn
 man das nach dem subtrahirten Quadrat
 des ersten Gliedes unmittelbar folgende
 Product durch das doppelt genommene
 oder mit 2 multiplicirte erste Glied der
 Wurzel dividirt, und sodann das Product
 des neuen Quotienten in den Divisor nebst
 dem Quadrat des zweyten Gliedes von der
 Zahl, woraus man die Quadratwurzel
 ausziehen will, subtrahirt. Dann es ist:

$$\begin{array}{r}
 aa + 2ab + bb \quad | \quad a + b \\
 \hline
 aa \\
 \hline
 2ab + bb \\
 (2a) \\
 2ab + bb \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

§. 102. Nach dieser Regel werde ich nun leicht in wirklichen Zahlen die Quadratwurzel finden können, wenn ich mir vorhero ein Wurzelstafel mache, worinnen alle Quadrate bis auf neune vorkommen. Wir nehmen die Cubiczahlen mit darzu, weil wir auch nächstens die Ausziehung der Cubicwurzeln zeigen werden, und so dann nicht nöthig haben, die Tafel doppelt herzusetzen:

Wurzeln	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Quadrat- zahlen	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
Cubiczah- len	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	789,

Aus dieser Tafel sehen wir, daß das größte Quadrat der einfachen Zahlen nur aus zwey Zahlzeichen bestche, und daß es auch einige Quadrate gebe, die sich nur durch ein einiges Zahlzeichen ausdrücken lassen. Folglich begreift man die Regel, kraft deren man eine Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen eintheilt, und je-

der

der

den, und der der Classe zwey Zahlzeichen, der letzten zur
 letzten Classe linken aber auch nur eins geben darf, wenn
 zur Linken zu- nemlich die Anzahl der Zeichen im Qua-
 weilen nur drat ungleich ist. Dann wie das einmal
 ein Zahlzei- eins nur bis auf neune zu wissen nöthig
 chen ausgeben dürfe;

nebst einer
 vorläufigen
 Anzeige, was
 um man den
 Classen der
 Cubiczahlen
 nicht mehr
 als drey, am
 Ende aber
 auch nur 2
 oder gar ein
 Zahlzeichen
 geben dürfe.

Exempel von
 Ausziehung
 der Quadrat-
 wurzel, wenn
 nichts übrig
 bleibt.

ist, so hat man auch bey den Quadraten
 nicht weiter zu wissen nöthig, weil die
 über neune hinausgehende Wurzeln als
 Wurzeln von zwey Glieder angesehen
 werden. Eben so siehet man, daß die
 größte Cubiczahl von den einfachen Zahlen
 nicht weiter als drey Zeichen bekommt,
 folglich wird man jezo schon die andere
 Regel vorläufig begreifen, daß man nem-
 lich bey Ausziehung der Cubiczahlen die
 gegebene Zahl in solche Classen eintheilen
 müsse, deren jede drey Zahlzeichen be-
 kommt, die letzte zur Linken aber auch eins
 oder zwey haben kann, weil es auch Cu-
 biczahlen von einem oder zwey Zahlzeichen
 gibt. Um nun ein Exempel von Auszie-
 hung der Quadratwurzel zu geben, so wol-
 len wir die Zahl 119025 dazu nehmen,
 und sie erstlich in Classen eintheilen, her-
 nach durch die allgemeine Regel §. 101.
 die Wurzel suchen. Die Operation ist die
 folgende:

$$\begin{array}{r|l}
 11 & 90 \mid 25 \mid 345 \\
 9 & : \\
 \hline
 2 & 90: \\
 & (64) \\
 2 & 56: \\
 \hline
 3 & 4 \mid 25 \\
 & (6 \ 8 \ 5) \\
 3 & 4 \ 25 \\
 \hline
 & 0.
 \end{array}$$

Ich habe erstlich die ganze Zahl in Classen von der Rechten zur Linken getheilt, und jeder Classe zwey Zahlzeichen gegeben. Hernach habe ich von der äußersten Classe zur Linken das nächst kleinere Quadrat, welches 9 ist, abgezogen, und die Wurzel von 9 welche 3 ist, dahin gesetzt, wo man die Quotienten bey der Division hinsetzt, den Rest von $11 - 9 = 2$ aber, wie bey der unter sich gehenden Division bemerkt, so: dann die folgende Classe auf gleiche Weise heruntergesetzt, ferner den neuen Divisor, $2a$, das ist im Exempel $2.3 = 6$ gesucht, und unter das erste Zahlzeichen zur Linken der folgenden Classe geschrieben, auch wirklich dividirt; da sich dann der Quotient 4 gegeben hat; weil ich ferner das Product $2ab + b^2$ das ist, im Exempel $6.4 + 4^2$ von den obern Zahlen nach der Regel §. 101. abziehen mußte, und $2ab + b^2 = (2a + b).b$ §. 60, oder im Exempel $6.4 + 4^2 = (6 + 4).4$, so dürfte ich, die Rechnung zu

vollständige Erklärung des gegebenen Exempels,

Wie man das zweite Glied der Wurzel finde, und warum der Divisor, wodurch es gefunden wird, das erste Glied doppelt annehmen seyn müsse.

Warum man den gefundenen neuen Quotienten nur zum Divisor hinsetze, und bey nach alles mit dem

neuen Quo-
tienten mul-
tipliciren,
und das Pro-
duct von der
correspondi-
renden Classe
abziehen dür-
fe.

Fortsetzung
der Opera-
tion, und wie
der gefunde-
ne ganze Quo-
tient, das ist,
das erste und
zweite Glied
der Wurzel,
zusammen ge-
nommen, als
das erste
Glied angefe-
hen werde,
wenn die
Wurzel mehr
Glieder hat.
Worauf man
zu sehen ha-
be, daß man
den Quoten-
ten nicht zu
groß nehme.

verkürzen, sogleich den vierer zum sechset
hinsetzen, und hernach das ganze Product
64 mit 4 multipliciren, und dieses neue
Product von nächst obigen Zahlen, welche
zum Unterschied in keine () wie das erste
Product eingeschlossen sind, abziehen; da
ich dann zum Rest abermal die folgende
Classe herabsetze. Nun suche ich wiederum
einen neuen Divisor, und betrachte meine
Wurzel 34 als a , folglich reducire ich die
Operation auf die vorige Regeln, und sa-
ge, $2a = 2.34 = 68$ ist der neue Divisor,
welcher unter die zu dividirende Zahl so
geschrieben wird, daß sein letztes Zahlzei-
chen 8 unter das erste Zahlzeichen der folgen-
den Classe, nemlich unter den Zweyer zu
stehen kommt. Hernach dividire ich wirk-
lich, muß mich aber zugleich hüten, daß
ich den Quotienten nicht zu groß nehme,
weil das folgende Quadrat b^2 auch noch
von der zu dividirenden Zahl abgezogen
wird. Der Quotient im Exempel ist 5,
diesen setze ich wieder zum Divisor, und
multiplicire die ganze Zahl mit 5, weil,
wie wir schon gesagt haben, $(68 + 5).5 =$
 $68.5 + 5.5$ und neben her wegen der Des-
eimalprogression, indem 68 eigentlich 600
 $+ 80$ ist, der Ausdruck $(68 + 5).5 =$
 $(600 + 80 + 5).5 = 685.5$. Wann
nun nach geschעהener Subtraction des ley-
ten Productes nichts mehr übrig bleibt, so
hat man die Quadratwurzel genau gefun-
den,

den, welche im gegebenen Exempel 345 ist.

Will man die Probe machen, so darf man nur die gefundene Wurzel mit sich selbst multipliciren, da dann das Product der gegebenen Quadratzahl gleich seyn muß, woferne man recht gerechnet hat.

Wie man die Probe, ob man recht gerechnet habe, machen könne.

§. 103. Es kann aber auch geschehen, daß sich die Quadratwurzel nicht genau ausziehen läßt, und am Ende noch ein ziemlicher Rest übrig bleibt. Bey diesem Fall nun fragt man billig, wie man es dann anzugreifen habe, daß man die wahre Quadratwurzel wenigstens so nahe, als möglich und zur Noth hinlänglich ist, finden könne? Man begreift leicht, daß es

Wie man es anzugreifen habe, wenn sich die Wurzel nicht genau ausziehen läßt, und am Ende noch ein Rest übrig bleibt.

dergleichen Zahlen die Menge gebe, und daß, wenn man genau seyn wolle, eine Menge von Brüchen dinstalls zum Quotienten kommen müsse. Weil aber die Rechnung mit den Brüchen so gar weitläufig und beschwerlich ist, und sie doch

und wie es dinstalls eine unendliche Reihe von Brüchen geben müsse.

bey dieser Operation von einem genauen Rechenmeister nicht vermieden werden können, so hat man Decimalbrüche, deren Nenner in der geometrischen Progression von 1, 10, 100, 1000 u. s. w. fortgehen, dazu erwählt, welche nicht nur vor allen andern am kürzesten sich ausdrücken lassen, sondern auch bey der gegenwärtigen Rechnung von selbst sich geben. Wir wollen die Sache zuerst durch ein Exempel erläutern, ehe wir die Regeln selbst anführen

warum man vorzüglich Decimalbrüche dazu erwählte, und was Decimalbrüche seyen.

264 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Exempel von und erweisen. Man solle die Quadrat-
solcher Rech. wurzel aus 3 ausziehen. Wir setzen also
nung. nach den bekannten Regeln

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 1 \frac{732}{1000}} \\
 \underline{1} \\
 2 | 0 0 \\
 (27) \\
 \underline{1 8 9} \\
 11. | 0 0 \\
 (3 | 43) \\
 \underline{1 0 2 9} \\
 7.1. | 0 0 \\
 (34 | 62) \\
 \underline{6 9 2 4} \\
 1 7 6 | 00 \text{ u. s. w.}
 \end{array}$$

Erklärung Denn ich sage, das nächst kleinere Qua-
des Exempels. drat von 3 ist 1, und seine Wurzel ist

gleichfalls 1; 1 von 3 läßt 2; zu diesem
Warum man so bald die Zweyer setze ich zwey Nullen, welche
Brüche an- gleichsam die folgende Classe ausmachen;
geben, dem Rest zwey damit ich aber nicht mehr herausbringe,
Nullen an; als ich verlange, so setze ich unter 200 im
hängen muß, Sinn den Nenner 100, da dann $\frac{200}{100} = 2$.
se, und wie Aus diesem unächten Bruch ziehe ich die
aus diesem Rest der Zeh-
ler des zu ex- Wurzel aus; und zwar aus dem Nenner
trahirenden 100, davon die Quadratwurzel allemal
Bruchs ge- 10 ist, (weil $10 \cdot 10 = 100$) nur im
füßten wer- Sinne, damit ich nicht so viel schreiben
de; dörfe; die Wurzel des Nenners setze ich

Warum man den Nenner wirklich nach dem Divisionszeichen als den
nur im Sinne Nenn

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 265

Nenner des Bruchs, dessen Zehler ich ausziehe, und nach der allgemeinen Regel nun suchen ^{also das Qua-} ^{brat des Nenn-} ^{ers nicht} ^{wirklich se-} ^{ben dürfe.} Der Divisor 2a ist hier $2 \cdot 1 = 2$; 2 in 20 ist 7 mal enthalten; (dann öfter malen kann ich ihn wegen den zu subtrahirenden Producten §. 103. nicht nehmen)

folglich ist 7 der Zehler zu dem ersten Bruch. Diese Zahl setze ich, wie in der ersten Operation, zum Divisor herunter, und sage, 7 mal 7 gibt 49; dahero werde 9 gesetzt, und 4 behalten; ferner 2 mal 7 gibt 14, und 4 behalten, gibt 18; das Product 189 ziehe ich von 200 ab; und dividire den Rest aufs neue durch 2a, welche in diesem Fall $= 2 \cdot 17 = 34$ nach §. 102. Ich muß aber dem Rest vorher wieder zwei Nullen anhängen, und aus dem abermaligen darunter verstandenen Nenner 100 die Wurzel 10 im Sinn ausziehen, und nach dem Divisionszeichen als den Nenner des Bruchs setzen, da ich dann nur eine Nullle dem vorigen Nenner anhängen darf, und sodann den Zehler 3 nach der allgemeinen Regel suchen muß u. s. w.

Die Ursache ist leicht begreiflich. Eine jede ganze Zahl kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Nenner eins ist. So ist $6 = \frac{6}{1}$, $18 = \frac{18}{1}$ u. s. w. folglich wird auch $6 = \frac{600}{100}$, und $18 = \frac{1800}{100}$ u. s. w. §. 65. 65. Demnach darf ich die Ausziehung der Wurzel übrig gebliebene Zahlen als Brüche ansehen, deren Nenner

Fortsetzung der Operation.

umständl. der Beweis dieser Rechnung.

wie man aus Brüchen die Wurzeln ausziehe,

ner 1 ist, und dabero auch den ganzen Bruch mit einer dritten Zahl, z. E. mit 100 multipliciren, ohne daß die Grösse des Bruchs geändert würde. Wie nun z. E. die Quadratwurzel aus $4 = 2$, so wird, weil $4\frac{00}{100} = 4$, die Quadratwurzel daraus $= 2\frac{00}{100} = 2$ seyn. Folglich muß ich beedes aus dem Nenner und Zehler die Wurzel ausziehen; jenes, weil es leicht ist, und man des vielen Schreibens gerne entübriget ist, thue ich bey der vorhabenden Operation im Kopf, dieses aber nach der allgemeinen Regel auf dem Papier, und fahre mit der Multiplication durch 100 so lange fort, bis ich glaube, ich fehle nunmehr kaum noch um 1 Million; oder Billiontheilchen u. s. w. Das heißt man nun die Wurzel durch die Approximation suchen, weil man ihrem wahren Ausdruck in wirklichen Zahlen dadurch immer näher kommt. Das erstemal erhält man also Zehentheile, das zweytemal Hunderttheile, das drittemal Tausendtheile, u. s. w. weil so oft die Approximationsrechnung wiederholt wird, allemal zwey Nullen weiter angehängt werden, und bekannter massen

Anwendung dieses Satzes auf die vorgetragene Rechnung.

Wie weit man die Operation fortsetzen solle; und was die Approximation seye.

Warum man so oft ein neuer Zehler gesucht wird, und wie Nullen weiter angehängt müssen.

Und wie aus der Natur der Decimal Operation

so steht man leicht, warum man im Quotienten zu dem Nenner bey jedesmaliger Operation nur eine Null, und zum Zehler

$$\sqrt{100} = 10, \sqrt{10000} = 100, \sqrt{1000000} = 1000 \text{ ist, u. s. w. Da nun } \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}, \text{ oder } \frac{a}{10} + \frac{b}{100} = \frac{10a+b}{100} \text{ §. 67.}$$

ler die gefundene neue Zahl hinzusetzen, brüche erhel-
und im vorgegebenen Exempel anstatt $\frac{7}{10}$ le, daß man
 $+\frac{3}{100}$ schreiben dürfe $\frac{73}{100}$ u. s. w. Dann dem Quotien-
wenn man sie wirklich unter einerley Be- ren des Ne-
nennung bringt, so kommt keine andere ners jedesmal
Zahl, als die bereits ausgedruckte heraus. nur eine Null-
dürfe. ke anhängen

§. 104. Eine Cubiczahl entsteht, wenn Von Auszie-
man eine Zahl dreyimal mit sich selbst mul- hung der Cu-
tiplicirt. 3. E. aaa oder a^3 oder 3. 3. 3 bicwurzeln.

= 27 sind Cubiczahlen. Diese Potenzen werden deswegen Cubiczahlen genannt, Ursprung des
weil in der Geometrie eine dreyimal mit sich Nommens
selbst multiplicirte Linie einen gleich hohen, der Cubie-
breiten und langen Körper gibt, den man zahlen.

einen Cubus nennet. Nun müssen wir auch wissen, wie man Cubiczahlen wirk-
lich ausziehe; dann die Quadrat- und Cu-
biczahlen kommen am öftesten vor. Eine Wie man
Cubicwurzel ist diejenige Zahl, die mit aber Cubie-
sich selbst dreyimal multiplicirt, die Cubie- wurzeln auf
zahl gibt; so ist 2 die Cubicwurzel von 8, zwey Gliedern
3 die Cubicwurzel von 27 u. s. w. Nun reduciren
fragt man, wie man diese Wurzeln wirk- könne.

lich finden solle. Sie können alle, wie die
Quadratwurzeln, aus zwey Gliedern be-
stehen; folglich wollen wir die Operation
abermal auf die binomische Wurzeln, dann
so nennt man die aus zwey Gliedern be-
stehende Wurzeln, reduciren. Wir wol-
len also $a + b$ zu dem allgemeinen Aus-
druck aller Wurzeln machen, und ihn drey-
mal mit sich selbst multipliciren, so werden
wir bekommen

$$a + b$$

Allgemeiner
Ausdruck für
alle Cubic-
zahlen, nebst
der Regel, die
daraus fließt.
set.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 \quad ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 \quad a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

Dieß ist der Ausdruck für alle Cubiczahlen, welchen man deswegen, wie auch den Ausdruck für die Quadratzahlen, billig auswendig lernen und behalten sollte. Wir sehen hieraus, daß eine jede Cubiczahl in sich enthält den Cubus des ersten Gliedes, hernach das dreymal genommene Product des zweyten Gliedes in das Quadrat des ersten, ferner das dreymal genommene Product des ersten Gliedes in das Quadrat des zweyten, endlich den Cubus des dritten Gliedes. Wenn ich also die Cubicwurzel wirklich ausziehen will, so suche ich in dem Wurzelstäflein die Cubicwurzel des ersten Gliedes, welches leicht zu finden ist. Hernach bemühe ich mich auch, das zweyte Glied zu bekommen. Dieses läßt sich finden, wenn man den nach Abzug des ersten Cubus vom ersten Glied übriggebliebenen Rest durch $3a^2$, das ist, durch das dreysache

Wie man die
Cubicwurzel
wirklich aus-
ziehe,

Auflösung
und
Beweis

fache Quadrat des ersten Gliedes dividirt,
(weil $3a^2b = 3a^2 \cdot b$, folglich $b = \frac{3a^2 \cdot b}{3a^2}$)

hernach die noch übrige Producte nach und nach subtrahirt, und die Operation so lange fortsetzet, bis man die Wurzel entweder genau, oder doch so genau, als möglich ist, erhält.

§. 105. Ein Exempel in Zahlen wird Exempel in die Sache deutlich machen. Weil die größte Cubuszahl von den einfachen Zahlen nicht über drey Zahlzeichen in sich begreift, so gibt man den Classen, darein sie getheilt werden, drey Zahlzeichen, doch so, daß in der letzten zur Linken auch Eins oder Zwen übrig bleiben können. §. 101. Hernach sucht man den nächstkleinern Cubus, welcher der äußersten Classe zur Linken correspondirt, ziehet ihn von den Zahlen dieser Classe ab, und setzet die Wurzel das von hinter das Divisionszeichen; welche hernach das erste Glied der ganzen Wurzel ist. Den abgezogenen Rest dividirt man durch das dreyimal genommene Quadrat dieser erst gefundenen Wurzel, damit man das zweyte Glied bekomme, u. s. w.
3. E.

$$a^3 = \begin{array}{c|c|c|c} 47 & 437 & 928 & 362 \\ \hline 27 & & & \end{array}$$

$$\text{Divisor } 3a^2 = (27)$$

$$\text{Partial-} \begin{cases} 3a^2b = 162 \\ \text{producte} \begin{cases} 3ab^2 = 324 \\ b^3 = 216 \end{cases} \end{cases}$$

Ihre Summe = 196561

Nest = 781 | 928.

Neuer Divisor, in welchem
 wenn $a = 36$; folglich

$$3a^3 = (3881.8)$$

Partial:
producte $\left\{ \begin{array}{l} 3a^2b = 7776 \\ 3ab^2 = 432 \\ b^3 = 8 \end{array} \right.$

Ihre Summe = 781928

Zeit Q.

Erklärung
des gegebenen
Exempels;
warum der
Divisor alle-
mal das
dreifache
Quadrat des
ersten Gliedes
seye,

warum das
letzte Abblai-
chen des ers-

Dann ich sage, der nächstkleinere Cubus von 47 ist 27, seine Wurzel 3; 27 von 47 lassen 20, zu diesem Rest setze ich die folgende Classe herab. Der Divisor muß $3a^2$ seyn, folglich $3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$, welcher so unterschrieben wird, daß sein letztes Zahlzeichen unter das erste der hers abgesetzten neuen Classe zu stehen kommt. 27 in 204 ist 6 mal enthalten. Weil nun 27 schon $3a^2$ ist, so bekomme ich $3a^2b$ wenn ich 27 oder den Divisor mit b oder dem gefundenen neuen Quotienten 6 multiplicire; das Product schreibe ich

ich also, daß sein letztes Zahlzeichen unter das erste der herabgesetzten Classe zu stehen kommt. Dann es sind weder Einheiten noch Zehner, sondern Hunderter. Das andere Product $3ab^2$ muß ich auf einem Nebenblättlein berechnen, wenn ich es nicht im Kopf genau ausfinden kann; dieses Product $3 \cdot 3 \cdot 6^2 = 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 324$ schreibe ich dergestalten, daß sein letztes Zahlzeichen unter das mittlere der herabgesetzten Classe gesetzt wird; dann es sind Zehner, folglich ist es eben so viel, als wenn eine Null noch angehängt wäre. Den Cubus des zweiten Glieds $b^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ setze ich endlich also unter, daß sein letztes Zahlzeichen gerade auf das letzte der herabgesetzten Classe sich beziehet und darunter zu stehen kommt, dann es sind Einheiten der Classe; die Partialproducte werden hernach zusammen addirt, und von den correspondirenden obern Zahlen subtrahirt; damit nun der Divisor, der nicht mit addirt werden darf, keine Verwirrung verursahe, so wird er gemeiniglich in () eingeschlossen. Der abgezogene Rest wird aufs neue nach eben dieser Methode dividirt; nur muß man dithfalls den ganzen Quotienten, das ist im Exempel 36 für das erste Glied annehmen; folglich wird der neue Divisor, in welchem $a = 36$, heißen $3 \cdot 36^2 = 3 \cdot 36 \cdot 36 = 3888$. Da dann die Division

272 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

sion und hernach die Abziehung der summirten Partialproducte, wie in der ersten Operation, geschieht.

Wie man die Sache an- greife, wenn etwas übrig bleibt, folgt, lich die Wur- zel sich nicht genau finden läßt.

§. 106. Sollte die Wurzel nicht genau herauskommen und nach geschעהner Operation noch was übrig bleiben, so hängt man dem Rest drey Nullen an, und zieht wie bey der Quadratwurzel aus dem im Sinn behaltenen Nenner 1000 die Cubicwurzel aus, welche allemal 10 ist, (weil $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) setzt sie als den Nenner des Bruchs, dazu man den Zehler finden will, in die Stelle des Quotienten, und verfährt mit dieser Rechnung so lange, bis man glaubt, der Fehler seye so klein, daß man ihn leicht übersehen dürfe: die Operation selbst und der Beweis ist vollkommen einerley mit demjenigen, was wir bey den Quadratwurzeln gesagt haben; wenn man nur jedesmal, statt zwey, drey Nullen anhängt, und hernach die allgemeine Regel von Ausziehung der Cubicwurzel dabey jedesmal anbringt. Wir lassen es dahero bey einem blossen Exempel bewenden, damit wir nicht allzuweit läufig werden. Man solle aus 12 die Cubicwurzel ausziehen. Wir setzen also nach der Regel

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 2100} \\ 8 \overline{) 4000} \\ 4 \overline{) 10000} \end{array}$$

Divisor $3a^2 = (12)$
 Partial-
 produkte $\left\{ \begin{array}{l} 3a^2b = 24 \\ 3ab^2 = 24 \\ b^3 = 8 \end{array} \right.$

Ihre Summe $= 2648$

neuer Divisor in welchem $3a^2 = (145 \overline{) 21000})$

u. s. w.

$a = 22$.

Dann ich sage, der nächste Cubus von 12 ist 8, seine Wurzel 2; 8 von 12 lassen 4, 4 mit 1000 multiplicirt, ist 4000, oder 4 mit 3 Nullen vermehrt; Aus dem im Sinn behalteneu Nenner 1000 ist die Cubicwurzel 10; der Divisor, durch welchen ich den Zehler finde, ist $3a^2 = 3.2.2 = 12$. u. s. w. Unsere Leser sehen nun zur Genüge, daß die Approximation, wie diese Operation genannt wird, durch die Multiplication der übrig gebliebenen Zahlen in einen Bruch, dessen Zehler und Nenner gleich sind, erhalten werde. Dieser Bruch könnte nun auch ein anderer seyn, z. E. bey Quadratzahlen, $\frac{25}{1}, \frac{16}{4}, \frac{9}{3}$ u. s. w. bey Cubizahlen $\frac{8}{1}, \frac{27}{3}$ u. s. w. wenn nur allemal der Nenner ein vollkommenes Quadrat oder Cubus bleibt; weil es sonst immer

Warum man dem Rest in diesem Fall 3 Nullen anhängt, und wie diese Operation sowohl bey Quadrat, als Cubizahlen, eine Erklärung der Wurzel durch die Approximation heisse. Beweis, daß das Anhängen der Nullen willkürlich seye, und man statt dessen auch neue

S

andern Qua-
drat, oder
Cubiczahlen
multipliciren
könnte;

warum aber
doch die Mul-
tiplication
durch die De-
cimalpro-
gression, oder
das Anbdn-
gen der Nul-
len, die schif-
lichste Metho-
de seye.

Probe der
bisherigen
Operation.

Ob man die
Ausziehung
der Cubic-
wurzel leicht-
er machen
könne;

Exempel ei-
nes ungenan-
ten, der vor-
gab, er habe
eine leichtere
Methode,
zum Bebuf
des Gedäch-
nisses in eini-
ge lateinische
Verse ver-
faßt.

neue Brüche statt des Nenners geben wür-
de. Man begreift aber von selbst, daß
in diesem Fall die übrige Zahlen jedesmal
wirklich mit dem Zehler multiplicirt wer-
den müßten; folglich würde man ungleich
mehr Mühe und Zeit brauchen, als man
durch die Multiplication mit 100 braucht;
anderer Vortheile besonders mit den Deci-
malbrüchen, zu geschweigen. Es ist also
die eingeführte Approximationsmethode die
allergeschicklichste und bequemste, die man
nur immer in wirklichen Zahlen erfinden
konnte. Will man endlich die Probe ma-
chen, so darf man nur den gefundenen
Quotienten dreymal mit sich selbst multi-
pliciren; und zum Product den Rest, wenn
einer übrig geblieben ist, noch addiren.

§. 107. Die Ausziehung der Cubic-
wurzel ist bey allen Vortheilen, die man
dabey anbringt, doch ungleich mühsamer
als die Ausziehung der Quadratwurzel.
Man hat daher auf allerhand Mittel ge-
sonnen, die Sache zu erleichtern. Ich
will eines anführen, welches aber nur den
jeningen gefallen wird, welche lieber einige
schlechte lateinische Verse als eine weit läng-
zere algebraische Formel auswendig lernen
wollen. Die ganze Kunst, die Cubicwur-
zel zu finden, hat ein ungenannter in fol-
gende Verse gebracht, welche aber einen
Commentarius nöthig haben. Sie heiß-
en:

Radix

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 275

Radix tota quadret, triplum divisor
habebit :

Tripletur quotus, factum ducatur. in
ante,

In stantes duc hoc, quoti cubus ad-
ditur extra.

Der erste Vers gehet den Divisor allein ^{Erklärung}
an, und zeigt, daß man ihn bekomme,
wenn man allemal die ganze Wurzel qua- ^{der angeführ-}
drirt, und das Quadrat davon dreymal ^{latein-}
nehme. Das heißt $3a^2$. Die zween fol-
gende Verse gehen auf die Summe der ^{sehen Verse,}
Partialproducte, und wollen, man solle
den neuen Quotienten mit 3 und sodann
wieder mit dem vorher gefundenen Quo-
tienten multipliciren, und dieses Product
noch einmal in alle hinter dem Divisions-
zeichen stehende Zahlen, multipliciren, und
hernach den Cubus des neuen Quotienten
so dazu addiren, daß sein letztes Zahlzeichen
eine einzechte Stelle zur Rechten bekomme,
oder daß die Einheiten des Products zu den
Zehnern des neuen Cubus u. s. w. addirt
werden. 3 E. in dem §. 105. gegebenen
Exempel ist das erste Product $19656 =$ ^{und Anwen-}

$(3 \cdot 6) 3 \cdot 36 (+ 216 \text{ extra additum.})$ ^{dung auf ein}
Das ist, wenn man wirklich multiplicirt
 $54 \cdot 36 = 1944$ Das zweite Product ^{Exempel}
 $+ 216$ in eben diesem Exem-
 19656 pel nemlich 781928
wird nach den Vers-

§ 2 regeln

276 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

regeln seyn: $3 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 362 + 8$ extra additum, dahn $3 \cdot 2$ heißt tripletur quotus, und $3 \cdot 2 \cdot 36$ factum ducatur in ante, und $3 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 362$ in stantes duc hoc. Das ist, wenn man wirklich multiplicirt 78192 , und der Cubus des letzten Quotienten 8 , qui extra additur, macht 781928 . Wer das extra addiren nicht recht versteht, der darf nur das ganze Product mit 10 multipliciren, und hernach den letzten Cubus nach den gewöhnlichen Additionsregeln addiren, welches der ungenannte Verfasser dieser Regel vielleicht gesagt hätte, wenn sich in den Vers geschickt hätte, oder wenn er nicht lieber etwas ungewöhnliches hätte sagen wollen. Doch genug hievon. Ich habe meinen Lesern nur eine Probe geben wollen, wie man auch Regeln habe, welche eben nicht allemal das Sinnreiche und Wichtige mit dem Gründlichen verbinden.

Beurthei-
lung dieser
Methode.

Vorberei-
tung zu New-
tons Regel,
die Wurzeln
aus höhern
Potenzen zu
extrahiren,
nebst einer
kurzen aber
begründeten
Nachricht
von dem
Ruhmvollen
Leben dieses
großen Gei-
stes.

§. 108. Nunmehr aber kommen wir auf eine Regel, welche ihrem Erfinder die größte Ehre macht. Man hat sie dem großen Newton zu danken, einem Manne, welcher, wie man aus seiner Lebensgeschichte weiß, neben seinen außerordentlichen Gaben und Einsichten, durch die Furcht des HErrn, welche er zum Anfang seiner Weisheit gemacht hat, allen Liebhabern der wahren Weisheit noch weit vorzuziehenswürdiger wird, als er der bloß gelehrt

gelehrten Welt durch die Stärke seines Geistes nur immer werden konnte. Ich würde mich bey dem Lob dieses Gelehrten in Rücksicht auf seinen Gottgefälligen Wandel noch weiter ausbreiten, wenn ich es nicht schon in meinen Betrachtungen über die Absichten der Religion gethan hätte; Jeko genüget mir, diese Anmerkung noch zu machen, daß die größte Gelehrten nicht nur die beste Christen seyn können, sondern daß auch das wahre Christenthum den gründlichen Wissenschaften ungemein aufhilft. Die Newtonische Erfindung, da von wir jeko reden wollen, besteht in einer allgemeinen Regel, nach welcher man die Grössen zu allen beliebigen Potenzen theils erheben, theils aus denselbigen die verlangte Potenzen wirklich ausziehen kann. Dann es gibt bekannter massen noch mehr höhere Potenzen, als blos Cubic, und Quadratzahlen. Wir müssen dahero auch zeigen, wie man mit diesen umgehen solle. Unsere Leser wissen schon, wie man eine Grösse mit sich selbst multiplicirt. Wenn man dahero die Cubiczahl $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nochmalen mit $a + b$ multiplicirt, so bekommt man die vierte Potenz $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, und wenn man diese Potenz nochmalen mit $a + b$ multiplicirt, so bekommt man die fünfte Potenz u. s. w. wie unsere Leser vom selbstn auf einem Nebenblättlein die Berechnung machen können.

Worinnen die Newtonsche Erfindung in Rücksicht auf die Wurzeln und Potenzen besteht.

Wie die Potenzen der binomischen Wurzeln nach den ordentlichen Multiplicationsregeln gefunden werden.

Tafel der Potenzen. S. 109. Zu dem Ende wollen wir eine Tabell bis auf die siebende Potenz hersehen, damit unsere Leser sehen, nach welchen Gesetzen die Glieder der Potenzen steigen und abnehmen:

1a	1	1b					
1a ²	2ab	1b ²					
1a ³	3a ² b	3ab ²	1b ³				
1a ⁴	4a ³ b	6a ² b ²	4ab ³	1b ⁴			
1a ⁵	5a ⁴ b	10a ³ b ²	10a ² b ³	5ab ⁴	1b ⁵		
1a ⁶	6a ⁵ b	15a ⁴ b ²	20a ³ b ³	15a ² b ⁴	6ab ⁵	1b ⁶	
1a ⁷	7a ⁶ b	21a ⁵ b ²	35a ⁴ b ³	35a ³ b ⁴	21a ² b ⁵	7ab ⁶	1b ⁷

Allgemeine Anmerkung, Aus dieser Tabelle siehet man schon, daß die Exponenten des zweiten Glieds abnehmen, wie die Exponenten des ersten Glieds zunehmen. Wenn man also zwei Progressionen, davon die eine in eben dem Verhältniß abnimmt, in welcher die andere steigt, untereinander schreibt, so werden die beiderseitige Producte die Glieder der neuen Potenz geben. 3 E.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^7 & a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\
 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & b^6 & b^7 \\
 \hline
 a^7 & a^6b & a^5b^2 & a^4b^3 & a^3b^4 & a^2b^5 & ab^6 & b^7
 \end{array}$$

Wie man die welches die fünfte Dignität von $a + b$ wird vor den Potenzen, wenn die Zahlen, oder Coefficienten, oder

oder Unzen, wie sie auch genannt werden, nemlich 1, 5, 10, 10, 5, 1 vollends dabey stünden. Da nun diese Unzen oder Coefficienten bey einer jeden Dignität sich ändern, so fragt sich nun, ob man keine allgemeine Regel wie für die Dignitäten selbst, also auch für die Coefficienten geben könne. Wann man die obige Tabell ansiehet, so findet man, daß die Coefficienten durch das Product der Exponenten der ersten Progression von a , dividirt durch das Product der Exponenten der zweyten Progression von b , oder überhaupt das Product der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, entstehen können. Z. E.

tenzen sieben de Zahlen nenne; wie heißen sie nemlich am schließlichen Coefficienten. Eine Regel für die Coefficienten, wie solche aus der Tabell durch die Introduction sich erweisen läßt.

Die Exponenten von a sind 5, 4, 3, 2, 1.
natürliche Zahlprogr. 1, 2, 3, 4, 5.

folglich der Coefficient vom
zweiten Glied
vom dritten
vom vierten
vom fünften
vom sechsten

$$\begin{aligned}\frac{5}{1} &= 5 \\ \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{1} &= \frac{20}{2} = 10 \\ \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} &= \frac{60}{2} = 10 \\ \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} &= \frac{120}{4} = 5 \\ \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} &= \frac{120}{8} = 1.\end{aligned}$$

Eben so findet man die Coefficienten der sechsten, siebenden und anderer Dignitäten; oder überhaupt, wenn der Exponent von dem ersten Glied m wäre, so gibt es folgende Progression:

Wie man die Progression der Potenzen selbst noch allgemeiner ausdrücken,

280 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

$a^m, a^{m-1}b, a^{m-2}b^2, a^{m-3}b^3, a^{m-4}b^4, a^{m-5}b^5$ u. s. w.

Dann es ist eben so viel, wenn ich in der obigen Progression setze,

$$\begin{cases} a^5, a^5-1b, a^5-2b^2, a^5-3b^3, a^5-4b^4, a^5-5b^5 \\ a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5 \end{cases}$$

Man wird daher diesen allgemeinen Ausdruck für alle Potenzen verstehen; folglich auch die Coefficienten nach der beobachteten Regel finden, da nemlich die Progressionen

für die Coefficienten $m, m-1, m-2, m-3, m-4$ geben werden den Coefficienten für das zweite Glied $\frac{m}{1}$.

gemeinen Ausdruck für das dritte $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$ re.

duciren sich für das vierte $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

us.

für das fünfte $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. w.

Dann wenn m in Zahlen gegeben wird, so muß sich die Progression endigen; z. E. wenn $m = 5$, ist $m - 5 = 0$, folglich das ganze Product null, und die Progression höret auf.

§. 110. Dieser Beweis ist nun eine Induction, und freylich nicht so scharf, als unerachtet er wenn er eine mathematische Demonstration wäre. Allein man mag den Versuch machen,

Warum dieser Beweis eine bloße Induction

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 281

machen, bey was für einer Potenz man ist, hoch will, so wird man finden, daß die Regel allgemein wahr und gewiß seye. Inzwischen hat ^{sehe} und ob man man doch in neuern Zeiten auf Beweise ihn nicht auf gesonnen, welche vollkommene mathema- ^{eine andere} tische Demonstrationen heißen können. Ich ^{Art, was} nemlich die will einen hier anführen, den ich vor meh- ^{Coefficienten} rern Jahren schon in der von mir heraus- ^{betrifft, be-} gegebenen Lettre sur quelques paradoxes ^{monstriren} könne.

du calcul analytique aufgesetzt, und zu Berlin in der Schule des berühmten Herrn Prof. Eulers gelernt habe. Wir wollen die Coefficienten mit den größern Buch- staben des Alphabets bezeichnen, und das eine Glied der Wurzel a , das zweyte x , den Exponenten aber n nennen: so wird seyn

$$(a+x)^n = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 + Ca^{n-3}x^3 \text{ u. s. w.}$$

dieses hat keine Schwierigkeit. Wenn ^{allgemein} wir nun die Summe der Progression S heißen; so wird $(a+x)^n = S$; diesen ^{mathemati-} Ausdruck solle man differentiiren. Wir sehe Demons- brauchen einen Lehrsatz dazu, nach welchem ^{stration für} man den Exponenten n um eins verringert, und hernach alles mit ndx multiplicirt; ^{die Regel der} folglich ist $n(a+x)^{n-1}dx = dS$ oder die ^{Coefficienten} Differentialgröße von S , welche durch dS ^{ten, welche} ausgedruckt wird; Die Differentialgröße von a ist $= 0$, weil es als eine beständige aber ^{Anfangs-} Größe angesehen wird, welche weder ab- ^{ger so lauge} noch zunimmt. Alles dieses solle an seinem Ort umständlich erwiesen werden. Es ist also ^{noch übers}

S S

$n(a$

schlagen können $n(a+x)^{n-1}dx = dS$, folglich §. 9. 58. 59. wenn
 man, bis sie die $(a+x)^n = S$ gleiches mit gleichem divi-
 dirt wird,

Fluxionen $\frac{n dx}{a+x} = \frac{dS}{S}$

rechnung $\frac{dx}{a+x} = \frac{dS}{nS}$ §. 9.

gelesen und $n dx = \frac{(a+x)dS}{S}$

verstanden $\frac{nS dx = (a+x)dS}{S}$ und

haben. $\frac{nS dx = (a+x)dS}{S} : dx$
 $nS = (a+x) \frac{dS}{dx}$ folglich

$$(a+x) \frac{dS}{dx} - nS = 0.$$

Den Wehrt dieser auf Nullen reducirten
 Gleichung muß man nun in der obigen
 Progression ausdrücken:

weil $S = a^n + Aan^{-1}x + Ban^{-2}x^2$ u. f. w.

so ist $dS = 0 + Aan^{-1}dx + 2Ban^{-2}xdx$
 $+ 3Can^{-3}x^2dx$ u. f. w.

und $\frac{dS}{dx} = 0 + Aan^{-1} + 2Ban^{-2}x +$
 $3Can^{-3}x^2$ u. f. w.

folglich, wenn man beiderseits mit $a+x$
 multiplicirt $(a+x) \frac{dS}{dx} =$

$$\begin{aligned} & 0 + Aa + 2Ba \quad x + 3Ca \quad x^2 + 4Da \quad x^3 \text{ f.} \\ & \quad \quad \quad n-1 \quad \quad \quad n-2 \quad \quad \quad n-3 \\ & + Aa \quad x + 2Ba \quad x^2 + 3Ca \quad x^3 \text{ f.} \end{aligned}$$

fo

so hat man, weil

$$-nS = -na - nAa^{\frac{n-1}{2}}x - nBa^{\frac{n-2}{2}}x^2 \text{ u. s. f.}$$

$$(a+x)^{\frac{dS}{dx}} - nS = 0 + (Aa^n - na^n)$$

$$+ (2Ba^{n-1}x + Aa^{n-1}x - nAa^{n-1}x)$$

$$+ (3Ca^{n-2}x^2 + 2Ba^{n-2}x^2 - nBa^{n-2}x^2)$$

$$+ 4Da^{n-3}x^3 + 3Ca^{n-3}x^3 - nBa^{n-2}x^2)$$

Da nun dieses zusammen Nulle ist, und die Coefficienten beständige Größen sind, die von x nicht abhängen, so wird ein jedes Glied Nulle seyn; folglich

I. $Aa^n - na^n = 0$

II. $2Ba^{n-1}x + Aa^{n-1}x - nAa^{n-1}x = 0$.

III. $3Ca^{n-2}x^2 + 2Ba^{n-2}x^2 - nBa^{n-2}x^2 = 0$.

Aus der ersten Gleichung finden wir also, weil $Aa^n - na^n = 0$,

$$\frac{Aa^n = na^n}{A = n} : a^n$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich folgende:

$$2Ba^{n-1}x = nAa^{n-1}x - Aa^{n-1}x$$

$$\text{-----} : a^{n-1}x$$

$$2B = nA - A.$$

$$= (n-1)A \quad \text{§. 60.}$$

$$\text{-----}$$

$$B = \frac{(n-1)}{2} A$$

Aus der dritten Gleichung kommt heraus

$$3Ca^{n-2}x^2 = nBa^{n-2}x^2 - 2Ba^{n-2}x^2$$

$$\text{-----} : a^{n-2}x^2$$

$$3C = nB - 2B = (n-2)B$$

$$\text{-----} : 3$$

$$C = \frac{n-2}{3} B.$$

Da nun $A = n$,

$$B = \frac{n-1}{2} A,$$

$$C = \frac{n-2}{3} B,$$

so werden die Coefficienten, wenn man die Wehrte dafür setzt, heißen :

$$A = n$$

$$B = \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

Was die so
genannte
Wundertafel
heißt.

§. III. Diesen Beweis kann man nun überschlagen, bis man das letzte Capitel im folgenden Theil gelesen und verstanden hat. Wir haben unsern Lesern dadurch zeigen wollen, daß man auch diese wichtige Newtonische Regel demonstrieren könne. Einige andere haben vorzeiten die sogenannte Wundertafel (Tabulam mirificam) zu Hülfe genommen und damit verglichen; sie entsteht, wenn man die in natürlicher Ordnung fortlaufende Zahlen so oft addirt, als die Progression es erfordert. Z. E.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & A & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
 \end{array}$$

Die

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 285

Die erste Reihe enthält Einsen, die zweite alle Zahlen in der gewöhnlichen Zahlenprogression, die dritte finde ich, wenn ich die unmittelbar vorhergehende Reihe addire, und sage, 1 und 2 sind 3, und 3 sind 6, und 4 sind 10, und 5 sind 15, und 6 sind 21; die vierte finde ich, wenn ich die dritte addire; 1 und 3 sind 4, und 6 sind 10, und 10 sind 20, und 15 sind 35, und 21 sind 56; die fünfte finde ich, wenn ich auf eben diese Weise die vierte addire; nemlich 1 und 4 sind 5, und 10 sind 15, und 20 sind 35, und 35 sind 70; u. s. w. Aus dieser Triangulartabelle sieht man nun, daß durch die vorgenommene Additionen verschiedene Polygonal-, und Pyramidalzahlen herauskommen. Das aber ist das besondere dabei, daß die horizontale Zahlenreihen jedesmal die Coefficienten von derjenigen Dignität geben, deren größter Exponent das zweite Zahlzeichen in der Reihe ist. Inzwischen ist die allgemeine Methode, die Coefficienten zu finden, deswegen vorzuziehen, weil man sonst die Tabelle bis auf tausend und mehr Zahlen fortsetzen, folglich allzu weitläufig dabei werden müßte. Uebrigens kann man auch durch den Ausdruck für die Coefficienten, nemlich

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u. s. w.}$$

eine

eine neue Combinationsregel, davon wir schon §. 99. gehandelt haben, noch ausführlicher erklären. Wenn z. E. sechs Buchstaben so combinirt werden sollen, daß das erstemal je zween und zween, hernach drey, ferner vier u. s. w. zusammen kommen; so werden die Regeln nach eben diesem Gesetze sich richten, wie man leicht die Probe mit Buchstaben u. s. w. selbst machen kann.

Aus dem §. 112. Nunmehr können wir erst recht den großen Nutzen der Newtonischen Regel zeigen, nachdem wir den Beweis der Progression gegeben haben. Der allgemeine Ausdruck für alle nur denkbare Potenzen ist,

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \text{ u. s. w.}$$

Nun wollen wir diesen Ausdruck noch schicklicher und kürzer schreiben lernen, damit man ihn desto besser auswendig lernen und behalten kann. Wir wissen aus

§. 57. daß $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ und $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ u. s. w.

folglich wird die obige Progression, wenn man gleiches für gleiches setzt, also ausseh-

$$a^m + \frac{m a^m b}{1 a} + \frac{m \cdot m - 1 a^m b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 a^m b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} \text{ u. s. w.}$$

Der

Der Ausdruck $\frac{b}{a}$ kommt in allen Gliedern, und noch
 auſſer dem erſten, vor. Wir wollen ihn kürzer vor-
 daher mit einem Buchſtaben Q bezeichnen. Und weil das erſte Glied auch in
 allen folgenden Gliedern wieder vorkommt,
 ſo wollen wir ſeine Wurzel P , ſolglich
 das erſte Glied P^m nennen. Dieſes gibt
 nun die der obigen ganz gleiche Progreſſion

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2 \\
+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 \text{ u. ſ. w.}$$

Aus dieſer Progreſſion ſehen wir, daß das
 erſte Glied im zweiten, und das zweite
 im dritten, und das dritte im vierten u.
 ſ. w. ganz enthalten ſeyen. Dann z. E.
 das dritte Glied $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$ iſt nichts
 anders, als das zweite Glied multiplicirt
 mit $\frac{m-1}{2} Q$, das iſt $\left(\frac{m}{1} P^m Q\right) \cdot \left(\frac{m-1}{2} Q\right)$. warum man
 die Regel

Damit wir nun nicht ſo viel ſchreiben dür- ſo kurz aus-
 fen, ſo wollen wir das erſte Glied A , das
 zweite B , das dritte C , das vierte D u. drücken
 ſ. w. nennen, hernach jedesmal den vor- ſtane,
 hergehenden kurzen Ausdruck in dem un-
 mittelbar folgenden Glied für ſeinen gleichen
 Factor ſubſtituiren, und das Q mit ſeinem
 Coefficienten damit multipliciren. Wenn
 also

238 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

also $P^m = A$, so ist $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} A Q$,

und weil wir diesen letzten Ausdruck B nennen,

so ist das folgende Glied $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$

$= \frac{m - 1}{2} B Q$. und weil dieses C heißen

soll, so wird das nächste $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3$

Der dritte $= \frac{m - 2}{3} C Q$ u. s. w. Demnach heißt

Ausdruck der Regel selbst, den man deswegen dem Gedächtnis leicht einprägen kann,

die endliche und letzte der ersten aber vollkommen gleiche Progression: $P^m +$

$\frac{m}{1} A Q + \frac{m - 1}{2} B Q + \frac{m - 2}{3} C Q +$

$\frac{m - 3}{4} D Q$ u. s. w. Das ist der Newton

nische Ausdruck, den man auswendig lernen und behalten muß, wenn man im folgenden den grossen Nutzen, den er über alle mathematische Wissenschaften ausbreitet, gründlich erlernen will.

allgemeine

Nutzenhaft

der Newton

nischen Re-

gel.

Diese einige algebraische Linie enthält mehr gründliches, zuverlässiges, wichtiges, fruchtbares und sinnreiches in sich, als oft ganze Bücher Raum enthalten. Das wichtige und sinnreiche dabey werden diejenige leicht begreifen, welche sich in einer scharfsinnigen Beobachtung der Aehnlichkeit üben, und daher im Stande sind, dem grossen Erfinder

Anwendung setzt nun, es wolle einer die Zahl 5 zur
auf wirkliche zweyten Dignität erheben; so wird er, das
Zahlzeichen, mit ich ein recht leichtes Exempel gebe, 25
bey Erbe bekommen; weil $5 \cdot 5 = 25$. nach der New-
bung zu Pos tonischen Regel muß aber die Wurzel zwey
temen. Glieder $a + b$ haben. Wir müssen also

5 theilen, z. E. in $2 + 3 = 5$. Man ver-
langt demnach das Quadrat von $2 + 3$.
 P ist also $= 2$, $= a$, $Q = \frac{1}{2} = \frac{b}{a}$ und $m = 2$.

Folglich $P^m = 2^2 = 4 = A$

$mAQ = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2^2 = 12 = B$.

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{2-1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 12 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{36}{4}$
 $= 9 = C$.

$\frac{m-2}{3} BQ = \frac{2-2}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 0$ weil $2 - 2 = 0$.

folglich hört die Rechnung bey dem vierten
Glieder auf. Und die Glieder sind $4 + 12$
 $+ 9 = 25$. Unerachtet nun dieses Exem-
pel leichter im Kopf gerechnet wird, so be-
greifen doch unsere Leser von selbst, daß es
schwerere gibt; z. E. man verlangt die sechste
Potenz von 28, das ist von $20 + 8$. So
ist $P = 20$ und $Q = \frac{8}{20}$ und $m = 6$. Da
dann die Rechnung sich halt geben wird.

bey Auszie-
hung der Ir-

rational

wurzeln, so

wohl in Zah-

len,

Eben so findet man durch diese Regel
alle Wurzeln. z. E. was ist $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.
Weil $2 = 1 + 1$. so ist $P = 1$ und $Q = \frac{1}{1}$
 $= 1$ und $m = \frac{1}{2}$, oder nach dem zweyten

Aus-

Ausdruck $m = 1$ und $n = 2$. oder $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

demnach
$$\frac{m}{P^n} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = \frac{1-2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} = C$$

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{3n} C Q &= \frac{1-2 \cdot 2}{3 \cdot 2} \cdot -\frac{1}{8} \cdot 1 = -\frac{1}{6} \cdot -\frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{48} = \frac{1}{2 \cdot 24} = \frac{1}{2 \cdot 8} = D. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m-3n}{4n} D Q &= \frac{1-3 \cdot 2}{4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{48} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{48} = - \\ &= \frac{5}{384} = E. \end{aligned}$$

Folglich ist die Quadratwurzel aus 2 oder $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{128}$ u. s. w.
Diese zwei Exempel sollen dißmahlen gewissam seyn, etwas von dem Nutzen unserer Regel bekannt zu machen. Dann unsere Leser erkennen von selbst, daß man, wie die gegenwärtige zwey, also noch viele tausend andere in Zahlen und Buchstaben auflösen könne; wenn man nur jedesmal eine gegebene Gröſſe in zwey Glieder nach Belieben theilt; welches bey allen Gröſſen, wie wir schon bewiesen haben, geschehen kann; wie dann auch alle zusammengesetzte Gröſſen oder multinomische Wurzeln auf zwey sich reduciren lassen. Will man auch ein Exempel in Buchstaben, so solle es $a^2 + x^2$ seyn. Man ziehe die als auch in Quadratwurzel daraus: folglich wird Buchstaben

$\sqrt{a^2 + x^2}$

$$P = a^2, \quad Q = \frac{x^2}{a^2}, \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{2}, \quad \text{demnach}$$

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} a \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{2a} = B,$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = \frac{1-2 \cdot \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2}}{4 \cdot 2a} = \frac{-1x^4}{4 \cdot 2a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} C Q = \frac{1-4 \cdot \frac{-1x^4}{8a^3} \cdot \frac{x^2}{a^2}}{6 \cdot 8a^3} = \frac{3 \cdot 1x^6}{6 \cdot 8a^3}$$

$$\text{demnach ist } \sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$$

$$+ \frac{x^6}{16a^5} \text{ u. s. w. Wir werden uns im}$$

folgenden, besonders bey der Fluxionenrechnung, auf diese Newtonische Regel mehrmalen berufen, daher man sich in der Privatübung mit dergleichen Aufgaben noch

Warum diese eine Zeitlang beschäftigen kann. Die Nahe Regel nicht men der binomischen und multinomischen, sondern auch auf Wurzeln haben wir schon gehört. Jene multinomische Wurzeln bestehen aus zwey, diese aus mehrern Gliedern der Wurzel. Weil sich aber alle auf sich anwenden die binomische reduciren lassen, so siehet man, daß sich alle Aufgaben dieser Art durch die Newtonische Regel auflösen lassen. Und das ist nun alles, was wir von dieser wichtigen Lehre sagen wollten.

Wie man die Irrationalgrößen behandeln soll, S. 114. Nach unserer gemachten Ordnung handeln wir jezo von Irrationalgrößen, wie auch von den bloß eingebildeten Größen

Größen. Irrationalgrößen sind alle diejenige Wurzeln, die sich durch keine endliche Zahlen ausdrücken lassen. Z. E. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, \sqrt{ax} u. s. w. Dann alle diese Ausdrücke sind so beschaffen, daß sie nach der Newtonischen in eine unendliche Reihe aufgelöst werden. Nun kann eine Irrationalgröße aus Rationalgrößen zum Theil bestehen; wie z. E. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$, da dann 8 ein vollkommener Cubus ist. Folglich und in wie siehet man schon, daß man die Irrationalgrößen zum Theil von ihrer Irrationalität befreien könne, wenn sich die Größe hinter dem Wurzelzeichen in zweien Factores vertheilen läßt, davon der eine diejenige Divisibilität ist, deren Wurzel man verlangt. rationalität befreien und schließlicher ausdrücken

So ist $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$. Oder
überhaupt $\sqrt[m]{a^m x^m} = \sqrt[m]{a^m} \sqrt[m]{x^m} = a \sqrt[m]{x} =$
 $x\sqrt[m]{a}$. In dieser Kunst muß man sich vorzüglich üben, weil sie zu schicklichen Ausdrücken Gelegenheit gibt, und solche Ausdrücke die Rechnung ungemein erleichtern. So ist $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ u. s. w.

§. 115. Wie man die vier Species oder Rechnungsarten bey allen Größen anbringen kann, so kann man auch die Irrationalgrößen darnach behandeln. Sie lassen sich nemlich addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren. Ben der

Wie man die vier Rechnungsarten bey Irrationalgrößen anbringen könne.

Addition und Subtraction muß man
 se, wie die Brüche, vorher unter gleiche
 Benennungen bringen; das ist, es muß
 sen nicht nur Wurzeln von einerley Dis-
 gnitäten seyn, sondern die hinter dem
 Wurzelzeichen stehende Größen müssen

einander gleich seyn. Z. E. $\sqrt[n]{x^m}$ und
 $\sqrt[r]{y^s}$ werden folgender Gestalt unter einer

ley Benennung gebracht: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

und $y^{\frac{s}{r}} = \sqrt[r]{y^s}$ folglich $x^{\frac{m}{n}} + y^{\frac{s}{r}} = y^{\frac{ms}{rs}}$

$+ y^{\frac{ms}{rs}} = \sqrt[r]{x^{\frac{ms}{n}} + y^{\frac{ms}{r}}}$. Oder in Zah-
 len; $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

Der der Ab- $+ 3\sqrt{2}$. Diese zwei Größen lassen sich
 dition und wirklich addiren, weil beiderseits hinter
 dem Wurzelzeichen einerley Größe, nem-
 Subtraction lich 2 steht. Ihre Summe ist also $5\sqrt{2}$.
 der Irratio Hingegen $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ lassen sich anders
 nicht addiren, als durch das dazwischen
 gesetzte Zeichen plus, weil die Größen
 hinter dem Wurzelzeichen ungleich sind,
 und sich nicht schicklicher ausdrücken las-
 sen. Eben so geht es bey der Subtraction,
 z. E. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$: hinger-
 gen $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ heißt eben $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ und
 läßt sich nicht anders ausdrücken, weil
 die Größen hinter dem Wurzelzeichen ver-
 schieden sind. In der Multiplication wer-
 den

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 295

den die Gröſſen vor und hinter dem Wurzelzeichen mit einander multiplicirt, wenn es Wurzeln von einerley Dignitäten ſind; Multiplicatio

E. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$ tion und

u. ſ. w. Sind es aber Wurzeln von verſchiedenen Dignitäten, ſo ſucht man ſie Division.

vorher zu Wurzeln von einerley Dignitäten zu machen, wie wir gezeigt haben. Eben ſo geht es bey der Division; indem die Gröſſen hinter dem Wurzelzeichen durch einander dividirt werden, wenn es Wurzeln von gleichen Potenzen ſind.

$$\text{Z. E. } \sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Oder in zuſammengeſetzten Gröſſen,

$$\begin{array}{r} (\sqrt{3}) \sqrt{15} - \sqrt{6} \mid \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ \underline{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{6} \\ (\sqrt{3}) - \sqrt{6} \\ \hline 0. \end{array}$$

Will man die Probe machen, ſo wird $(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}) = \sqrt{15} - \sqrt{6}$, welches die zu dividirende Gröſſe war. Wie man den Da mit nun unſre Leſer überzeugt werden, Beweis der daß dieſe Regeln richtig ſeyen, ſo wollen wir vollkommene Potenzen hinter die vorgeschriebenen Wurzelzeichen ſetzen. Man ſolle addiren $\sqrt{4} + \sqrt{4}$ ſo hat man $2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$. nung auch Da nun $\sqrt{4} = 2$ und ſolglich der Ausdruck $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2$. ſo ſieht der Einbil- man, daß die Additionsregel richtig, und bungskraft,

begreiflich
machen kön-
nen.

dahero auch $\sqrt{3} + \frac{1}{3} = 2\sqrt{3}$ sene, wenn nemlich die Grösse hinter dem Wurzelzeichen keine solche Potenz ist, aus deren die Wurzel in endlichen Zahlen gegeben werden kann. Eben diese Methode läßt sich auch auf die Subtraction anwenden. Mit der Multiplication und Division wollen wir ein gleiches versuchen. Man solle $\sqrt{4}$ mit $\frac{1}{9}$ multipliciren: wir wissen schon, was herauskommen muß, nemlich 6; weil $\sqrt{4} = 2$; $\frac{1}{9} = 3$; und $2 \cdot 3 = 6$. Wenn wir nun die Grössen hinter den gleichen Wurzelzeichen mit einander multipliciren, so bekommen wir $\sqrt{4} \cdot 9 = \sqrt{36} = 6$. wie in der gewöhnlichen Rechnung. Und wenn man $\sqrt{16}$ durch $\sqrt{4}$ dividirt, so bekommt man 2; weil $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{4} = 2$ und $4:2 = 2$. Nach der Regel dividire ich die Zahlen hinter dem Wurzelzeichen, da ich dann $\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$, wie in der gewöhnlichen Rechnung bekommen. Also haben die Regeln ihre vollkommene Richtigkeit; und unsere Leser sehen zugleich in einem neuen Exempel, wie man der Einbildungskraft durch Hülfe der Reduction auf ähnlichere und leichtere Fälle, auch das, was bloß der Verstand begreift, gleichsam vor die Augen hinmahlen könne.

Was einge-
bildete Grö-
ßen seyen,

§. 116. Eingebildete Grössen sind solche Grössen, welche weder positiv noch negativ, und noch vielweniger Nullen sind.

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 297

sind. 3. E. $\sqrt{-2}$. wenn nemlich hinter dem Wurzelzeichen das Zeichen minus der Grösse vorgesetzt wird. Sie sind we, der positiv noch negativ, sonst würde $-2 = +2$ seyn. Sie sind aber auch nicht Nullen, sonst wäre $-2 = 0$. Folglich sind es eingebildete Grössen, und das ist der Grund dieser Benennung. Dann man darf deswegen nicht denken, daß es contradictorische Grössen seyen; indeme die obige Erklärung blos auf den mathematischen Operationen beruhet. Im philosophischen Verstand sind es dennoch positive Grössen; dann was man sich vorstellen, einbilden und denken kann, ist positiv. 3. E. in der Geometrie sind negative Grössen diejenigen, welche eine der positiven entgegen gesetzte Richtung haben. Nun kann ich eine solche Grösse als ein Quadrat ansehen, welches 3. E. -4 seyn solle; also läßt sich auch die Seite des Quadrats denken, welche $\sqrt{-4}$ heißen wird. In der Arithmetik kann zwar kein Quadrat $-a^2$ seyn; denn entweder ist die Wurzel $-a$ oder $+a$; ist sie $-a$ so ist das Quadrat $+a^2$, weil minus mit minus plus gibt; ist sie $+a$ so ist das Quadrat vorhin $+a^2$. Allein nach der obigen Erklärung läßt sich doch wenigstens in der Geometrie eine solche Wurzel denken.

Ob solche Grössen wenigstens im philosophischen Verstand nichts positives seyen, und wie ferne man sich selbige einbilden und vorstellen könne.

§. 117. Die vier sogenannte Species
 Wie man die lassen sich auch bey dieser Gattung von
 eingebildeten Wurzeln anbringen. Man kann sie nicht
 Größen für, nur kürzer ausdrücken, sondern auch ab-
 ziehen ausdrücke, dividiren. Dann z. E. $\sqrt{18} = \sqrt{9}$.
 wie man sie $- 2 = 3\sqrt{-2}$. $\sqrt{-8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-2} = 2\sqrt{-2}$. u. s. w. Das heißt man kürzer
 addire und ausdrücken §. 114. die Addition und
 subtrahire, Subtracion geschieht, wie bey den an-
 dern Irrationalgrößen. Z. E. $3\sqrt{-2}$
 $+ 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2}$ und $3\sqrt{-2} -$
 $2\sqrt{-2} = 1\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$. Das hat
 keine Schwierigkeit. In der Multiplica-
 tion befolgt man abermal die Regel §. 115.
 nur mit dem Unterscheid, daß das hinter
 dem Wurzelzeichen stehende Zeichen minus
 durch die Multiplication nicht verändert
 wie man sie wird; indeme die Regel, einerley Zeichen
 multiplicire geben plus, verschiedene minus, nur auf
 und dividire, sich anwenden läßt. Z. E. $\sqrt{-3} \cdot 2\sqrt{-3}$
 $- 3$ ist $2\sqrt{-6}$. und $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} =$
 $\sqrt{-15}$ und $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{-9} =$
 $- 3$. Dann wenn plus durch die Mul-
 tiplication herauskäme, so würden die ein-
 gebildete Wurzeln aufhören, solche zu seyn,
 und in wahre verwandelt werden; welches
 aber wider ihre Eigenschaft streitet, wie
 wir §. 116. erwiesen haben. Das Pro-
 duct von $\sqrt{-5} - \sqrt{-7} + \sqrt{-2}$
 multiplicirt mit $\sqrt{-3}$

ist also $\sqrt{-15} - \sqrt{-21} + \sqrt{-6}$.

Eben

Eben diese Regel beobachtet man bey der Division; da z. E. $\sqrt{6} : \sqrt{2} = \sqrt{3}$ ist u. s. w. Diß ist die lehre von den eingebil deten Wurzeln. Daß es endlich auch Gröffen gebe, die ein doppeltes Wurzelzeichen wie z. E. $\sqrt{\sqrt{6}}$ vor sich haben, wird man leicht begreifen. Man darf nur z. E. die vierte Potenz von 2 nemlich 16 nehmen, so wird $2 = \sqrt{\sqrt{16}}$ seyn; das ist, weil $\sqrt{16} = 4$ ist, $\sqrt{4}$ oder $\sqrt[4]{16} = 2$. Diese Gröffen werden wie die Irrationalgröffen §. 115. 116. behandelt; wir wollen unsere Leser daher nicht länger damit aufhalten.

Ob es auch Gröffen gebe, die ein doppeltes Wurzelzeichen haben, und wie diese zu behandeln.

§. 118. Es ist noch übrig, daß wir die letzte Eigenschaft der Wurzeln in Absicht auf ihre Dignitäten vollends erklären. Man kann nemlich fragen, ob eine gegebene Dignität nur eine oder mehr Wurzeln habe, und wenn sie mehr als eine hat, ob und wie man ihre Anzahl bestimmen könne. Unsere Leser werden schon vorläufig merken, daß die Antwort auf die Mehrheit der Wurzeln ausfallen wird. Denn wenn sie nur eine Quadratzahl betrachten, so sehen sie schon, daß sie aus der Multiplication zweyer Wurzeln erzeugt werden kann. Das Quadrat 9 hat die Wurzel + 3; sie kann aber auch die Wurzel - 3 haben. Dann $-3 \cdot -3 = + 9$. so ist überhaupt $a^2 = a \cdot a$, ist aber

Ob eine gegebene Potenz nur eine oder mehr Wurzeln habe,

und wenn sie mehr als eine hat, ob man nicht bestimmen könne, wie viel und was für es seyen.

aber auch $= -a$. $-a$. also sind die Wurzeln $+a$ und $-a$. bey Cubiczahlen wird es vielleicht noch mehr Wurzeln geben, u. s. w. Wir wollen daher sehen, ob wir keine allgemeine Regel, die Wurzeln zu bestimmen, erfinden können.

Vorbereitung zur Auflösung der vorgelegten Frage, wenn man verschiedene Wenn wir Gleichungen machen, so viel wir wollen, und sie alle auf Null reducirt, miteinander multipliciren, so kann es geschehen, daß wir einen Weg finden, unsere Frage aufzulösen. Es seye demnach $x = 2$ so ist $x - 2 = 0$, ferner $x = 3$ so ist $x - 3 = 0$, und endlich $x = 4$ so ist $x - 4 = 0$, folglich

bene Gleichungen auf

Null reducirt.

$$x - 2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x$$

$$- 3x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$x - 4$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$- 4x^2 + 20x - 24.$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$$

Oder wenn wir Buchstaben nehmen, und sehen

$$x = a \text{ folglich } x - a = 0$$

$$x = b \text{ folglich } x - b = 0$$

$$x = c \text{ folglich } x - c = 0.$$

so bekommt man durch die Multiplication
 $x - a$

$$\begin{array}{r}
 x - a \\
 x - b \\
 \hline
 x^2 - ax \\
 \quad - bx + ba \\
 \hline
 x^2 - \left\{ \begin{array}{l} ax \\ bx \end{array} \right. + ba \\
 \quad \quad x - c \\
 \hline
 x^3 - \left\{ \begin{array}{l} ax^2 \\ bx^2 \end{array} \right. + bax \\
 \quad \quad - cx^2 + \left\{ \begin{array}{l} acx \\ bcx \end{array} \right. - bac \\
 \hline
 x^3 - (a + b + c)x^2 + (ba + ac + bc)x - \\
 \quad \quad \quad bac = 0
 \end{array}$$

Da nun für x gesetzt werden kann a, b, c , folgen aus oder in Zahlen 2, 3, 4, und die Gleichung den gemachten allemal Nullen werden wird, wie sich leicht ^{ten Gleichungen in} die Probe machen läßt, so sieht man, daß ^{Rücksicht auf} die letzte Gleichung drey wahre Wurzeln ^{die Wurzeln,} habe, nemlich a, b , und c , oder 2, 3, und 4. Wenn man aber das Exempel noch genauer betrachtet, so wird man folgende Regeln daraus herleiten können.

I. Eine jede Gleichung hat so viel ^{I. Wie viel} Wurzeln, als der Exponent der ersten ^{eine gegebene} Dignität Einheiten in sich begreift; nemlich ^{Poten; jedesmal} x^3 hat 3 Wurzeln, x^4 würde 4 haben, und x^n würde n Wurzeln haben.

II. Die bekannte GröÙe des ^{II. Aus was} zehnten Gliedes ist die Summe aller Wurzeln, ^{man die Wurzeln selbst sind} $a + b + c$

ben und nach $(a + b + c)$ die bekannte Gröſſe des dritten und nach be- Glieds iſt die Summe der Producte aus ſtimmen kön- je zwei und zwei Wurzeln; u. ſ. w. das ne, letzte Glied iſt endlich das Product aller Wurzeln. (abc) oder in Zahlen $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

III. Woran man erkenne, wie viel wahre und falſche Wurzeln eine Gröſſe haben.

III. Es ſind ſo viel wahre oder poſitive Wurzeln vorhanden, als unmittelbare Abwechslungen der Zeichen $+$ und $-$ vorkommen, z. E. im gegenwärtigen Exempel wechſeln die Zeichen gerade ab; folglich ſind es lauter wahre oder poſitive Wurzeln. Dieſe letzte Regel hat Harriot gefunden, und ohnelängſt der berühmte Herr von Setzner demonſtrirt. Die beide erſtere flieſſen aus der Natur der vorgegebenen Gleichung, und haben keine weitere Demonſtration nöthig.

Beantwortung der Frage, wie es in-gehe, daß eine einzige Gröſſe ſo vielerley Wurzeln haben könne,

§. 119. Vielleicht gibt es Leſer, welchen es ungewöhnlich vorkommt, daß eine einzige Dignität z. E. die zehende Dignität von zwey, ſo viele, nemlich in dieſem Fall, zehen Wurzeln haben ſolle? In dem Wurzeltäſelein gehen die Dignitäten in der Ordnung fort; und wir haben biſher geglaubt, 2 ſey die einzige Cubicwurzel von 8, 3 von 27, 4 von 64 u. ſ. w. Wie iſt es dann möglich, daß dieſe Zahlen noch mehrere Wurzeln haben, und wenn dieſes ſich ſo verhält, wie viele Wurzeln braucht man, die mancherley Wurzeln der höhern Dignitäten zu finden? auf die erſte

erste Frage wollen wir zuerst durch ein augenscheinliches und leichtes Exempel antworten, damit auch die Einbildungskraft von der Möglichkeit dieser Sache deutlich überzeugt werde. Wir sagen, die Cubiczahl 8 oder 2^3 hat wirklich drey Wurzeln, nemlich die positive Wurzel 2, und noch zwei andere eingebil dete, welche $-1 + \sqrt{-3}$ und $-1 - \sqrt{-3}$ sind. Was die positive Wurzel anbelangt, so hat die Sache keine Schwierigkeit, dann $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. daß hingegen der Cubus der beiden eingebil deten Wurzeln $(-1 + \sqrt{-3})^3$ und $(-1 - \sqrt{-3})^3$ auch vollkommen achte ausmachen, das müssen wir jetzt beweisen. Die Sache ist leicht, wenn man nur gut multipliciren kann. Dann

und wie 1. 2. 3 oder die Cubzahl von 2 wirklich drey verschiedene Wurzeln hat, durch deren dreymalige Multiplikation der Cubus 8 entsteht,

Die ganze Sache wird durch ein augenscheinliches Exempel

aus der Einbildungskraft begrifflich und scharf

gemacht,

$$\begin{array}{r}
 -1 + \sqrt{-3} \\
 -1 + \sqrt{-3} \\
 + 1 - \sqrt{-3} \\
 \hline
 -\sqrt{-3} + 1 - 3 \\
 \hline
 \text{gibt das Quadrat } +1 - 2\sqrt{-3} - 3 = -2 - 2\sqrt{-3} \\
 \text{dieses Quadrat wird nochmals multiplcirt durch die Wurzel} \\
 \begin{array}{r}
 -2 - 2\sqrt{-3} \\
 -3 + \sqrt{-3} \\
 \hline
 +2 + 2\sqrt{-3} - 3 \\
 \hline
 -2\sqrt{-3} - 3 - 2 - 3
 \end{array}
 \end{array}$$

so bekommt man die Cubzahl $= +8 - 8 = 8$

Da

Da nun $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ so ist die ganze Cubiczahl $2 + 6 = 8$; folglich ist die angeführte Wurzel $1 + \sqrt[3]{-3}$ auch eine Cubicwurzel von 8. Eben so ist auch eine Wurzel davon $1 - \sqrt[3]{-3}$, wie man die Probe leicht durch eine ähnliche Rechnung machen kann. Nun wird man fragen, wie finden wir dann solche Wurzeln? Auch das wollen wir an dem nemlichen Exempel zeigen. Die positive und wahre Cubicwurzel von 8 ist bekanntermaßen 2. Nun wollen wir diese Wurzel x nennen, so ist $x = 2$ und $x^3 = 8$ folglich $x^3 - 8 = 0$. Diese auf Null reduirte Gleichung der Potenz wollen wir durch ihre gleichfalls auf Null reduirte Wurzel $x - 2 = 0$ dividiren; da dann herauskommt:

$$\begin{array}{r}
 (x-2) \overline{) x^3 - 8} \quad x^2 + 2x + 4 = 0. \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 + 2x^2 - 8 \\
 (x-2) \overline{) 2x^2 - 4x} \\
 \underline{2x^2 - 4x} \\
 + 4x - 8 \\
 (x-2) \overline{) 4x - 8} \\
 \underline{4x - 8} \\
 0
 \end{array}$$

Der Quotient ist also $x^2 + 2x + 4$, welcher nothwendig $= 0$, weil die zu dividiren

vidirende Zahl so wohl als der Divisor
 $= 0$ waren. Nun wollen wir beiderseits
 3 subtrahiren, so ist, weil

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$3 = 3$$

$$x^2 + 2x + 1 = -3$$

und wenn man beiderseits die Quadrat-
 wurzel ausziehet,

$$x + 1 = \pm \sqrt{-3} \text{ folglich}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

welches die beide eingebildete Wurzeln
 sind. Der Grund, warum wir die Qua-
 dratwurzel von -3 gesetzt haben $+\sqrt{-3}$
 und $-\sqrt{-3}$ oder $\pm\sqrt{-3}$ wird unsern
 Lesern aus §. 117. noch Erinnerunglich seyn;
 Weil nemlich eine jede Quadratwurzel
 das Zeichen $+$ und $-$ haben, und a^2
 nicht nur $+a$ $+a$ sondern auch $-a$ $-a$
 seyn kann.

§. 120. Nunmehr glauben wir, uns folgen aus
 sere Leser wundern sich nicht mehr darü- dem bis her-
 ber, wenn sie hören, daß die Potenzen gen, und
 mehrere und verschiedene Wurzeln haben Vorberet-
 können. Wir eilen daher auch zur tungen zur
 zweiten Antwort, und zeigen, wie man wort, wie
 die verschiedene Wurzeln finden solle, man nemlich
 Dieses ist nun freylich ein beschwerlichs dene Wur-
 Geschäfte; dann es ist nicht nur die Fra- zeln wirklich
 ge, wie man die Wurzeln überhaupt, finden soll.
 sondern wie man besonders die positive

unterschied ne. Wahre und positive Wurzeln sind
der wahren nemlich alle, welche das Zeichen plus ha-
ben; falsche hingegen heißen diejenige,
und falschen welche negativ sind, oder das Zeichen mi-
nus vor sich haben; man kann auch die
Wurzeln, eingebil- dene Wurzeln einigermassen hieher
rechnen. Weit schicklicher wäre es, wenn
man die erstere nur positive, die letztere aber
negative, und nicht falsche Wurzeln hieß

Eingebil- dene. Von den eingebil- dene Wurzeln
Wurzeln merkt man dieses insbesondere noch an,
daß, wo sie vorhanden, selbige nie allein,
sind, wo sie sondern noch einen oder mehrere Gefährten
sich finden, haben, doch so, daß ihre Anzahl niema-
len ungleich, sondern immer gleich und
allemal paar- gerade ist. Es sind also entweder zwei,
weil vorhan- oder vier, oder sechs, niemalsen aber
den, nur eine, oder drey, oder fünf u. s. w.
in einer Potenz befindlich. Wenn dem-
nach in einer Potenz drey eingebil- dene
Wurzeln gefunden worden sind, so wird
gewiß die vierte auch noch darinnen ste-
hen.

Ein Exempel. In dem §. 118. gegebenen Fun-
von lauter damentalexempel kommen lauter wahre
wahren und und positive Wurzeln vor; wir wollen
positiven und positive Wurzeln vor; wir wollen
Wurzeln. daher auch eines von negativen geben,
ehe wir die Art und Weise, die Wurzeln

Ein Exempel, wirklich zu suchen, vollends erklären. Es
wo auch ne- setze $x = 2$ so ist $x - 2 = 0$. Ferner
gative Wur- setze $x = -3$ so ist $x + 3 = 0$. Folglich
zeln vorkom- men, $(x - 2) \cdot (x + 3) = x^2 + x - 6 = 0$.

Weil

Weil zwey Zeichen plus auf einander folgen, so siehet man schon, daß nach §. 118. nr. III. eine negative Wurzel da seye; es ist aber auch eine positive vorhanden, weil plus und minus einmal unmittelbar auf einander folgen. Die Probe dieser Regel erhellet aus der vorgenommenen Operation selbst; dann die eine Wurzel war ja -3 und die andere $+2$. Ferner hat die erste Gröſſe den Exponenten zwey, folglich enthält die Gleichung zwey Wurzeln, wie abermal aus der Operation selbst ersichtlich ist; die bekannte Gröſſe des zweyten Gliedes ist 1; dann $x = 1x$, folglich ist 1 die Summe aller Wurzeln; indeme $-3 + 2 = -1$. nur daß sie das entgegengesetzte Zeichen hat. Endlich das letzte Glied ist das Product der Wurzeln; dann $-3 \cdot 2 = -6$. Wann ich also für x in der Gleichung -3 setze, so habe ich $x^2 + x - 6 = -3 \cdot -3 + 1 \cdot -3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$. Auf gleiche Weise werden Gleichungen von höhern Potenzen gefunden; und der Unterschied bestehet bloß darinnen, daß die Rechnung mühsamer und weitläuftiger wird.

§. 121. Nunmehr können wir zeigen, wie man die wahre Wurzeln findet. Wir haben gehört, daß das letzte Glied das Product aller Wurzeln seye, daher man sich am sichersten gehet, wenn man das letzte Glied in alle seine Factores vertheilet,

Allgemeine

Antwort.

und mit einem jeden einen Versuch wagt, ob er für x gesetzt werden könne, und durch diese Substitution die neue Aequation Null werde. Ist dieses, so ist die angenommene Wurzel eine wahre Wurzel. Z. E. in dem obigen Exempel $x^2 + x - 6$ ist das letzte Glied $6 = 2 \cdot 3$; wir wollen also einen Factor, nemlich 2 für das x setzen, so werden wir haben $4 + 2 - 6 = 0$;

Warum man

noch beson-

dere Ant-

worten und

Aufsungen

nöthig habe,

und was für

Fälle vor-

kommen,

welche man

besonders zu

merken habe.

folglich ist 2 eine wahre Wurzel. Weil es aber geschehen kann, daß nicht nur einige Glieder in einer solchen Gleichung fehlen, sondern daß auch selbst das letzte Glied gar zu groß ist, und allzu viele Factores hat, folglich die Arbeit durch das oftmalige Versuchen zu mühsam und langsam würde, so hat man auf Mittel gesonnen, eines theils eine Gleichung kleiner zu machen, andern theils die nähere Grenzen zu finden, zwischen welche die wahre Wurzeln hineinfallen. Dann wenn das letzte Glied klein ist, so hat es weniger Factores; je weniger Factores aber darinnen stecken, desto eher und gewisser kann ich die Wurzeln verrathen. S. 118. nr. II. Ferner wenn ich die Grenzen der Wurzel weiß, z. E. daß sie zwischen 5 und 12 hineinfalle, oder grösser als 5, und kleiner als 12 seye, so werde ich die wahre Wurzel auch leichter finden, als wenn mir diese Grenzen unbekannt wären. Wie man nun diese beide Mittel finden und

und anwenden solle, müssen wir jezo noch erklären.

§. 122. Wir zeigen zuerst, wie man ^{Wie man es} eine Gleichung, folglich auch ihr letztes ^{gegeben} Glied, kleiner machen könne; wiewohl ^{es} es nöthig ist, daß es, wenn Brüche vor ⁱⁿ Gleichung kommen, auch zuweilen grösser werde; ^{verändern} sodann wie man die fehlende Glieder er- ^{füllen} gänzen solle. Diß können wir am besten ^{können} thun, wenn wir die Art und Weise, wie die vier Rechnungsarten oder Species auf die Gleichungen von dieser Art angewendet werden, vorläufig erklären. Man kann hier nemlich wiederum addiren, sub- ^{und wie dies} trahiren, multipliciren und dividiren, und ^{ses durch An-} das alles auf eine gar leichte und beque- ^{wendung des} me Weise. Z. E. man solle in der Glei- ^{nier Rech-} chung $x^2 - 5x + 4 = 0$. ^{nungsarten} geschehe:

die Wurzel x um 3 vermehren, oder zu ^{durch die} x noch drey addiren, so sage ich, die um 3 vermehrte Wurzel oder $x + 3$ solle ^{Addition} y heißen, das ist:

$$x + 3 = y \text{ folglich}$$

$$x = y - 3$$

$$x^2 = (y - 3) \cdot (y - 3) = y^2 - 6y + 9$$

$$- 5x =$$

$$- 5y + 15$$

$$+ 4 =$$

$$+ 4$$

$$\text{eine neue Gleichung } y^2 - 11y + 18 = 0.$$

in welcher $y = x + 3$. Eben so kann ich ^{und durch} subtrahiren, z. E. 2, wenn ich setze

$$x - 2 = y.$$

Da dann die Sub- ^{traction} $x = y + 2$ und die ganze

U s

Ope:

310 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Operation, wie die obige vorgenommen wird. Nämlich ich muß das Quadrat von x in dem gleichen Werth von $y + 2$ suchen, da ich dann $y^2 + 4y + 4$ bekomme; hernach muß ich $-5x$ in dem gefundenen Werth von x , ausdrücken, da ich dann $-5(y+2) = -5y - 10$ bekomme; das letzte Glied 4 muß ebenfalls noch abdrirt werden, wenn die Gleichung null werden solle. Das gibt nun den Ausdruck $y^2 - 5y - 10 = 0$; in welchem $y = x - 2$ u. s. w.

Wie man die §. 123. Man kann die Wurzeln solcher Gleichungen auch multipliciren; Dann man solle in der Gleichung

$$x^3 + bx^2 + cx + q = 0$$

den Wurzeln die Wurzel x mit a multipliciren; so setze man $ax = y$ folglich

$$x = \frac{y}{a}$$

demnach ist:

$$x^3 = \frac{y^3}{a^3}$$

$$bx^2 = \frac{by^2}{a^2}$$

$$cx = \frac{cy}{a}$$

$$q = q$$

Also

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{by^2}{a^2} + \frac{cy}{a} + q = 0.$$

$$y^3 + aby^2 + a^2cy + a^3q = 0.$$

wenn

wenn ich nemlich beederseits mit a^3 multiplicire. In dieser Gleichung ist $y = x.a$ und was für
 Man darf also in diesem Fall eine ge- ^{eine allge-}
 gebene Gleichung nur durch eine geo- ^{meine und}
 metrische Progression multipliciren, ^{solche Regel,}
 deren erstes Glied eins, das zweyte ^{multipl-}
 aber, oder der Exponent diejenige Zahl ^{ren, aus der}
 ist, durch welche die Gleichung mul- ^{Operation}
 tiplicirt werden solle. Dann die obige ^{bergeleitet}
 Gleichung wird eben so gut erhalten, wenn
 man ein jedes Glied in die darunter ge-
 schriebene Progression multiplicirt; z. E.

$$\begin{array}{r} y^3 + by^2 + cy + q \\ \hline y^3 + aby^2 + a^2cy + a^3q = 0. \end{array}$$

Man muß aber in diesem Fall die fehlen- ^{Wie man die}
 de Glieder nicht vergessen; dann es kann ^{in der Gleichung}
 geschehen, daß das zweite Glied u. s. w. ^{ist und}
 wenn z. E. $+ 2x^2$ und $- 2x^2$, welche ^{ie fehlende}
 einander aufheben, in einer Gleichung falls zu be-
 vorkämen, ganz wegfielen; daher man ^{handeln}
 seine Stelle mit einem * bezeichnet, und ^{se, und was}
 das correspondirende Glied der geometri- ^{der fehlen.}
 schen Proportion darunter setzt. Z. E.

$$\begin{array}{r} x^3 * + cx - q \text{ multiplicirt mit 2 ist} \\ x^3 * + cx - q \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \\ x^3 + 4cx - 8q. \end{array}$$

§ 12 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Von der Di. Bey der Division ist die Operation eben
vifion der so leicht. Man solle in
Gleichungen.

$$x^3 + bx^2 - cx + r = 0$$

die Wurzel x dividiren durch a , so setze
man $\frac{x}{a} = y$ folglich

$$x = ay. \text{ Dahero}$$

$$x^3 = a^3 y^3$$

$$+ bx^2 = ba^2 y^2$$

$$- cx = - cay$$

$$+ r = + r$$

$$a^3 y^3 + ba^2 y^2 - cay + r = 0$$

wenn man nun beederseits mit a^3 dividirt,
so hat man

$$y^3 + \frac{by^2}{a} - \frac{cy}{a^2} + \frac{r}{a^3} = 0.$$

eine neue Gleichung, in welcher $y = \frac{x}{a}$;

Reist einer
kurzer Divi-
sionsregel.

Man setzet aber zugleich, daß sie erhal-
ten werde, wenn man die erste Gleichung durch eine geometrische Pro-
gression dividire, deren erstes Glied
eins, und das zweyte die Zahl ist, durch
welche dividirt werden solle; dann die
Divisores $1, a, a^2, a^3$ gehen in geometris-
cher Progression fort. Man muß aber
auch hier die Anmerkung beobachten, die
wir in Absicht auf die fehlende Glieder
bey der Multiplication, gegeben haben.

Se

So wird z. E. x durch 3 dividirt in der Gleichung

$$\begin{array}{r} x^3 + px - r \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline x^3 + \frac{px}{9} - \frac{r}{27} \end{array}$$

Dies ist die ganze Lehre von der Anwendung der vier Rechnungsarten auf diese höhere Gleichungen. Nunmehr werden wir mit leichter Mühe zeigen können, wie man die verschiedene Wurzeln finden solle.

§. 124. Die Fälle, die einem die Operation schwer machen, haben wir angegeben. Z. E. wenn ein Glied fehlt; so vermehrt man die Wurzel mit eins u. s. w. §. 122. wenn ein oder mehr Brüche vorkommen, so multiplicirt man mit dem Nenner des Bruchs, oder dem Producte aller Nenner der vorkommenden Brüche; kommen Irrationalgrößen vor, so sucht man sie bald durch die Multiplication bald durch die Division hinweg zu schaffen; will man ein Glied aus der Gleichung, z. E. das zweite hinwegbringen, so versucht man es theils durch die Addition, theils durch die Subtraction, je nachdem das wegzuschaffende Glied das Zeichen plus oder minus hat. In jenem Fall wird die Wurzel um die durch den Exponenten des ersten Glieds dividirte bekannte GröÙe des zweiten Glieds vermehrt, in die-

314 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

sein aber vermindert. Will man das letzte Glied kleiner haben, so versucht man es bald durch die Addition bald durch die Subtraction; u. s. w. Was aber die Grenzen einer Gleichung betrifft, so müssen wir davon noch eine besondere Rechnung hersehen, welche in dieser Materie die letzte seyn solle.

Wie man die Schranken finde, zwischen welche die wahre Wurzeln hinfallen.

§. 125. Weil das letzte Glied das Product aller Wurzeln ist, so kann einem dieses die Schranken bestimmen helfen. Es seyen die Wurzeln 3 und 5, so wird $(x - 3) \cdot (x - 5) = x^2 - 8x + 15$. Hier kommt der in der Einleitung vorgebrachte Satz das erstemal vor; nemlich was grösser ist, als ein von zwei gleichen Grössen, das ist nun grösser als die andere u. s. w.

Nun ist $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Folglich $x^2 + 15 = 8x$

Dahero $x^2 < 8x$

$$\frac{x^2}{x} < \frac{8x}{x} : x$$

$$x < 8$$

Ferner weil $x^2 + 15 = 8x$

so ist

$$15 < 8x$$

$$\frac{15}{8} < \frac{8x}{8} : 8$$

$$\frac{15}{8} < x.$$

Also sind 8 und $\frac{15}{8}$ die Schranken von x ; das ist, die Wurzeln sind kleiner als 8 und grösser als $\frac{15}{8}$. Es ist auch wirklich so; dann

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 315

dann sie sind 5 und 3. Wenn man es nun allgemein machen will, so kann man

$$x^2 - qx + r = 0 \text{ setzen. Folglich}$$

$$x^2 + r = qx$$

$$\frac{r}{x} < q$$

$$\frac{r}{q} < x.$$

$$q$$

Ferner weil $qx = x^2 + r$

$$\text{so ist } \frac{qx}{x} < \frac{x^2 + r}{x} : x$$

$$\text{und } q < x.$$

Also sind q und $\frac{r}{q}$ die Schranken bey quad-

ratischen Gleichungen. Bey Cubischen kann man sie eben so finden. Z. E. wenn das zweite Glied fehlt, so setzt man

$$x^3 - qx + r = 0. \text{ Folglich}$$

$$x^3 + r = qx$$

$$x^3 < qx$$

$$\frac{x^3}{x} < \frac{qx}{x} : x$$

$$x^2 < q$$

$$x < \sqrt{q}.$$

Ferner, weil

$$x^3 + r = qx \text{ so ist}$$

$$\frac{r}{x} < q \text{ und}$$

$$\frac{r}{q} < x.$$

Folglich sind $\frac{r}{q}$ und \sqrt{q} in diesem Falle die Schranken. u. s. w. Wenn man nun die

§ 16 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Was man
weiter bey
Anwendung
der gegebe-
nen Regeln
zu beobach-
ten habe.

die Schranken einmal gefunden hat, so werden die wahre Wurzeln sich näher finden lassen. Da man die Sache dann nach denjenigen Regeln, die wir §. 124. vorgetragen, versüchet, und je nachdeme einem die natürliche Gaben und die Uebung das Geschicke dazu geben, durch wichtige und scharfsinnige Vergleichen, Substitutionen, Theilungen u. s. w. das Problem aufzulösen bemühet ist; wie wir jetzt bey den algebraischen Aufgaben zeigen wollen, wenn wir vorher noch was wenigens von den unreinen quadratischen Gleichungen gesagt haben werden.

Von unreinen quadratischen Gleichungen,

Ihr allgemeiner Ausdruck,

wie nöthig es seye, daß man eine solche Gleichung zu ergänzen wisse.

Wie viele Fälle vor-
kommen;

§. 126. Wenn das letzte Glied in einer Quadratzahl fehlet, und doch die Zahl einer gegebenen Grösse gleich gesetzt wird, z. E. $x^2 + mx = n^2$, so heist man diesen Ausdruck eine unreine quadratische Gleichung. Es ist ungemein viel daran gelegen, daß man diese Gleichung zu ergänzen wisse; dann sie kommt nicht nur öfters vor, sondern sie trägt auch zu den Auflösungen der schönsten und wichtigsten Aufgaben sehr vieles bey. Wir wollen die Auflösung auf zwey Fälle anwenden. Der erste ist, wenn $x^2 + ax = b^2$; nun fragt sich, wie man die Gleichung ergänze, damit man die Wurzel ausziehen, und das x in bekannten Grössen hernach finden könne. Wir wissen, daß allemal gleiches herauskommt, wenn man gleiches

ches zu gleichem addirt. §. 9.' Es ist als ^{Ausführung} so nur die Frage, was man beiderseits addiren solle? wann wir wüßten, wie das ^{des ersten} dritte Glied in der quadratischen Gleichung galls, samt heißen müsse, so wäre es am natürlichsten, wenn wir dieses addiren. Wir ^{dem Beweis,} wollen sehen, ob wir nicht einen Ausdruck finden können, der dem gesuchten dritten Glied gleich ist. Ein ganzes Quadrat ist $a^2 + 2ab + b^2$, das dritte Glied ist also das Quadrat von demjenigen halben Factor des zweiten Gliedes, der noch nicht im ersten Glied vorkame. Da nun die Factores des zweiten Gliedes $2ab$ sind a und $2b$; dann $a \cdot 2b = 2ab$; und aber a schon im ersten Glied vorgekommen; so richte ich mein Augenmerk blos auf den zweiten Factor $2b$; diesen halbire ich; so habe ich b , sein Quadrat ist b^2 . Eben so mache ich es mit der obigen Gleichung:

$$\text{sie heißt } x^2 + mx = n^2$$

Das zweite Glied heißt mx , der Factor, auf den ich mein Augenmerk richte, heißt m , weil x im ersten Glied vorkame; ich halbire also m , und bekomme $\frac{1}{2}m$, diesen halben Factor quadrire ich, da er dann $\frac{1}{4}m^2$ heißt, und folglich das dritte Glied des unvollkommenen Quadrats seyn wird. Wenn ich nun beiderseits dieses Quadrat $\frac{1}{4}m^2$ addire, so finde ich

$$x^2$$

318 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

$$x^2 + mx = n^2$$

$$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$$

$$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = n^2 + \frac{1}{4}m^2$$

ziehe ich nun beiderseits die Quadratzurzel aus, so ist

$$x + \frac{1}{2}m = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2}$$

$$\text{und } x = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2} - \frac{1}{2}m$$

Auflösung Der andere Fall ist,

und Beweis $x^2 - mx = n^2$, da ich dann wieder addire $+\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$

des andern

$$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = n^2 + \frac{1}{4}m^2$$

Fallg.

$$x - \frac{1}{2}m = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2}$$

$$x = \frac{1}{2}m + \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2}$$

Dieser letztere Fall ist wie der erste beschaffen; ausgenommen, daß das zweite Glied der Wurzel negativ wird; dann z. E. $(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$, wie die allgemeine Multiplicationsregeln mich lehren. Folglich darf ich in diesem Fall $\frac{1}{4}m^2$ wiederum als eine positive Größe addiren; in der Wurzel aber wird als lemal das zweite Glied negativ seyn. Das ist die Auflösung und der Beweis von dieser überaus wichtigen Lehre, die unreine quadratische Gleichungen, wie sie Herr Baron von Wolf nannte, oder (equationes quadraticae affectae) zu behandeln. Wir können daher nicht umhin, unsern Lesern diese Regel noch einmal anzupreisen, nach welcher man ein
folgt

solches Quadrat ergänzt, wenn man das Quadrat des halbirten und im ersten Glied nicht vorgekommenen Factors vom zweyten Glied, zu ihm addirt. Wann also der Ausdruck $x^2 + \frac{1}{2}x$ hiesse, so wird die Ergänzung $\frac{1}{4}$ heißen; wäre $x^2 + \frac{a}{2}x$ zu ergänzen, so muß das dritte Glied $\frac{a^2}{4}$ heißen. Alle diese Fälle sind unter der Regel begriffen, weil man allemal den Coefficienten von x halbird, und hernach quadriert. Die Hälfte von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$ und das Quadrat davon $\frac{1}{16}$; die Hälfte von $\frac{a}{2}$ ist $\frac{a}{4}$ und das Quadrat davon $\frac{a^2}{16}$ u. s. w. Doch diese Ausdrücke werden unsere Leser nunmehr verstehen, wir wollen daher zum Beschluß eilen.

§. 127. Wir haben versprochen, am Ende der Arithmetik noch einige algebraische Aufgaben vorzulegen. Es gibt bestimmte und unbestimmte Aufgaben. Die letztere kommen mir vor, wie diejenige Fragen, darauf man einem vielerley Antworten geben kann; da hingegen die bestimmte Aufgaben solchen Fragen gleich sind, auf welche nicht mehr als eine einzige Antwort möglich ist. Z. E. wenn man fragt, ob man einem nicht zwei Zahlen sagen könne, deren Summe 30 seye; so kann man eine Menge Antworten darauf

Wiederholung der Regel, und Anwendung auf einige besondere Fälle in Zahlen und Buchstaben.

Von algebraischen Aufgaben.

Unterschied der bestimmten und unbestimmten Aufgaben.

auf

§ 20 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

auf geben. Dann $10 + 20$, $15 + 15$, $16 + 14$, $29 + 1$ u. s. w. sind lauter solche Zahlen, durch welche die Frage aufgelöst wird. Frage ich aber, wie die zwei Zahlen heißen, deren Summe drey und deren Differenz eins ist: so gibt es nur eine Antwort; nemlich die Zahlen sind 2 und 1. Weil aber doch solche bestimmte Fragen auch in der Buchstabensrechnung auf eine allgemeine Art aufgelöst werden: so kann man die erste Auflösung für individuell ansehen, die zweite hingegen für eine solche, die eine ganze Gattung von Individuellfragen, welche alle zu einer Classe gehören, auflöst. Nur hat man bey allen diesen Aufgaben vorzüglich auf die Möglichkeit zu sehen.

Bestimmte Aufgaben sind wieder, um entweder individuell oder allgemein.

Warum man besonders darauf zu sehen habe, ob die Aufgabe auch möglich seye,

Dann wie das geometrische Problem, man solle aus zwei geraden Linien ein Zweyeck machen, in der Geometrie unmöglich ist; so gibt es auch in der Arithmetik dergleichen unmögliche Aufgaben und Fragen, welche entweder die Schwäche dessen, der sie aufgibt, oder dessen, der sie auflösen will, verrathen. So ist es unmöglich, zwei ganze und positive Zahlen zu finden, deren Summe 1, und deren Differenz 2. u. s. w. Man muß also zu den arithmetischen oder algebraischen Aufgaben, dann es ist gleichviel, ob ich ihnen einen griechischen oder arabischen Namen gebe, einen scharfsinnigen Wiß und eine gute

gute Beurtheilungskraft vorläufig mitbringen, wenn man einen guten Fortgang sich versprechen will. Hieraus wird sich hernach die Fähigkeit von selbst geben, eine Aufgab, und besonders den Anfang der Rechnung, deutlich, kurz, und auf eine solche Weise zu setzen, daß man den Witz des Rechners sogleich aus den zwei bis drey ersten Linien ansehen kann, und wie die Scharfsinnigkeit des Witzes bey mathematischen Aufgaben besonders aufser.

§. 123. Um nun eine kurze Anleitung zu dieser schönen Arbeit zu geben, wollen wir unsern Lesern die Art und Weise, ein Problem geschickt und wohl zu setzen, aus den Newtonischen Schriften anführen. Die Aufgaben lassen sich durchgehends mit Worten und mit Zeichen ausdrücken. Wir wollen beede Ausdrücke in Zeichen und Worten nebeneinander setzen; dann die Hauptkunst eines algebraischen Geistes bestehet darinnen, daß er alle Bedingungen einer Aufgab in wirklichen Gleichungen schicklich ausdrücke. Z. E. Newton gibt folgendes Exempel:

Ein Kaufmann vermehret sein Vermögen, wie Exempel, wie mögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahr zur Erhaltung seiner Familie 100. fl. Sterling davon weg, gesetzt werden und wird nach drey Jahren nochmalen so reich, als er anfänglich war: wie viel hat er also im Vermögen?

\mathcal{A}

I. Der

322 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Individuelle

Umstände das
bey vorkom-
men.

I. Der Ausdruck
in Worten.

1) Ein Kauf-
man besitzt ein
gewisses Ver-
mögen,

2) wovon er das
erste Jahr 100.
Pf. Sterling
braucht.

3) den Rest ver-
mehrt er um ein
Drittheil.

4) das zweite
Jahr braucht er
wieder 100. Pf.
davon.

5) den Rest ver-
mehrt er um ein
Drittheil.

6) im dritten
Jahr braucht er
abermal 100. Pf.

7) Er vermehrt
den Rest noch-
malen um ein
Drittheil,

8) und ist noch
etmal so reich
als er im An-
fang war.

II. in Zeichen;

x

$$x - 100$$

$$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$$

$$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$$

$$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$$

$$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$$

$$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$$

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$$

Jetzt ist das Problem gesetzt, und es ist
weiter nichts übrig, als daß man calcu-
lirt, und x findet; wenn man in der Glei-
chung beiderseits mit 27 multiplicirt, so ist

64x

$$\begin{array}{rcl}
 64x - 14800 & = & 54x, \\
 \text{folglich} \quad 10x - 14800 & = & 0 \\
 \hline
 10x & = & 14800 \\
 \hline
 & & : 10 \\
 x & = & 1480.
 \end{array}$$

In diesem Exempel siehet man wohl, daß der Begriff des Kaufmanns u. s. w. nicht zur Rechnung gehört; man könnte es also noch allgemeiner machen, wenn man den jährlichen Aufwand a , und die jährliche Vermehrung $\frac{1}{10}$ oder P nennen würde u. s. w. Dieses und einige folgende Exempel stehen in Newtons arithmetica universalis.

§. 129. Nunmehr wollen wir nach von aller der Ordnung, von allerley Gattungen, band be- Exempel und Aufgaben hersehen. Das stimmen Aufgaben, leichteste ist; wenn man zwei Zahlen x ohne indivi- und y finden solle, deren Summe a und duelle Um- deren Differenz b ist. Wir haben es in stände; Wie man zwei der Einleitung vorgetragen, jezo aber Größen fin- wollen wir es kürzer auflösen. Nach der den solle, der Bedingung des Problems ist $x + y = a$, und Differenz gegeben ist. und $x - y = b$; nun will ich diese beide Gröſſen zuerst addiren, und hernach von einander subtrahiren, und sehen, was heraus kommt:

$$x +$$

$$x +$$

$$\begin{array}{r}
 x + y = a \\
 x - y = b. \\
 \hline
 2x = a + b. \quad \text{Folglich} \\
 \hline
 : 2 \\
 x = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.
 \end{array}$$

Die grössere Zahl x ist daher allemal der zur halben Summe; addirten halben Differenz gleich; oder die grössere Zahl wird gefunden, wenn ich zur gegebenen Summe die gegebene Differenz addire, und alles zusammen hernach halbiere, oder durch 2 dividire. Ferner, wenn man subtrahirt

$$\begin{array}{r}
 x + y = a \\
 x - y = b. \\
 \hline
 2y = a - b \\
 \hline
 : 2 \\
 y = \frac{a - b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.
 \end{array}$$

Warum man diese Aufgabe behalten solle, und wo man sie wieder brauche. Die Kleinere Zahl ist also die halbe Summe weniger die halbe Differenz. Dieses ist die allgemeine Auflösung für alle Zahlen dieser Art. Man muß sie um so eher behalten, weil man sie in der Trigonometrie wieder gebraucht.

Wie man aus §. 130. Will man aus dem gegebenen Product und der Summe der Zahlen, die Zahlen selbst finden, so kann man die Aufgabe entweder auf das obige Problem reduciren

reduciren, oder durch eine zu ergänzende und der quadratische Gleichung auflösen; dann wenn die Summe a und das Product b ist; so darf ich die halbe Differenz nur x nennen; da ich dann bekomme die grössere Zahl $\frac{1}{2}a + x$, und die kleinere $\frac{1}{2}a - x$, und ihr Product $\frac{1}{4}a^2 - x^2 = b$. Folglich $\frac{1}{4}a^2 - b = x^2$ und $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$. Nenne ich aber die gesuchte Zahlen x und y , so ist $x + y = a$, und $xy = b$. Da gebe es dann eine quadratische Gleichung;

weil $x = a - y$ und $x = \frac{b}{y}$ folglich

$$a - y = \frac{b}{y} \text{ und } ay - y^2 = b \text{ oder}$$

$$y^2 - ay = -b. \text{ Dahero}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$$

$$y = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}.$$

Da nun wie man die $x = a - y$ so läßt sich auch x leicht finden, wenn man den gefundenen Werth des y von a subtrahirt. Anfänger haben ein größeres Vergnügen, wenn man die Exempel mit individuellen Umständen vortrage, schönert; man kann dabei einen zugleich auf die Probe setzen, ob er das wesentliche vom ausserwesentlichen nicht nur unterscheidet, sondern auch das Problem selbst recht fasse. Wir wollen dahero einige hieher schreiben, welche theils Marquis d'Hospital, theils Newton gegeben haben.

326 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Eine indivi-
duelle Aufga-
be, bey wel-
cher eine un-
reine, quadra-
tische Gleis-
chung vor-
kommt.

Der erstere sagt: ein Frauenzimmer wur-
de gefragt, wie alt sie seye. Sie ant-
wortete: ihre Mutter habe sie gerade im
vierzigsten Jahr ihres Alters gebahren,
wenn man nun ihrer Mutter gegenwärtis-
ches Alter mit ihrem (der Tochter) eigenen
Alter multiplicire; so komme das Alter
Methusalems heraus, des ältesten unter
den Menschen, welcher 969 Jahr gelebet
habe. Aus dieser Berechnung werde
man ihr Alter finden. Wir nennen das
Alter der Tochter x Jahre. Die Mut-
ter muß also damals, da die Tochter um
ihre Alter, gefragt wurde, $40 + x$ Jahre
alt gewesen seyn. Dann 40 Jahr war
sie alt, da sie die Tochter gebahr, zu dies-
sem Alter kommt nun noch das Alter der
Tochter, da dann die Summe das Alter
der Mutter in der gegebenen Zeit aus-
macht. Dieses Alter solle mit dem Alter
der Tochter multiplicirt werden, das Pro-
duct ist 969. Nun ist die erste Gleis-
chung gesetzt.

$(40 + x)x = 969$. Das ist, wenn
man wirklich multiplicirt:

$40x + x^2 = 969$. Eine unreine qua-
dratische Gleichung:

$$\begin{array}{r} x^2 + 40x = 969 \\ 400 = 400. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 40x + 400 = 969 + 400 = 1369. \\ x + 20 = \sqrt{1369} = 37. \end{array}$$

$x = 37 - 20 = 17$. Also ware
die Tochter 17. Jahr alt. §. 131.

§. 131. Es gibt auch Exempel von ^{Eine indivi-} Brüchen. Wir wollen sie wieder mit ^{duelle Auf-} individuellen Umständen begleiten. Py^{thago}ras wurde einmal gefragt, wie viel ^{gab, wobey} Schüler er habe; Er antwortete: die Helfte studire die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, der vierte aber müsse sich noch im Stillschweigen üben; und eben jeso habe er drey neue Schüler angenommen. Wenn man nun die Anzahl der Schüler x nennet, so wird nach des Pythagoras Antwort seyn:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 3$$

das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt, und addirt,

$$\frac{1}{24}x + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = x + 3.$$

Folglich $\frac{16x}{24} = x + 3$

$$. 24$$

$$26x = 24x + 72$$

$$24x = 24x$$

$$\text{subtr. } 24x.$$

$$2x = 72$$

$$: 2$$

$$x = 72 = 36.$$

Also hat Pythagoras 36 Schüler gehabt.

§. 131. Wir wollen auch einige ^{Eine indivi-} Exempel aus den Newtonischen Schrif^{viduelle Auf-} ten geben. Ein Reisender wird von ei^{gaben aus} nigen Bettlern um ein Almosen ersucht; ^{Newtons} ^{Schriften.} gibt er nun einem jeden 3 kr. so hat er

℥ 4

8 kr.

8 fr. zu wenig; (dann wir wollen die englischen Münzsorten auf unser deutsches Geld reduciren,) gibt er aber einem jeden 2 fr. so bleiben ihm noch 3 fr. übrig. Man frage, wie viel er Geld gehabt, und wie viel es Bettler gewesen seyen. Die Anzahl der Bettler solle x seyn; so ist $3x$ die Anzahl der Bettler dreymal genommen. Eben so viel Kreuzer nemlich $3x$ fr. mußte der Reisende nun ausgeben, wenn er einem jeden 3 fr. gäbe; dann er gäbe ja gleichviel aus, wenn dreymal so viel Bettler da wären, und er einem jeglichen einen Kreuzer gäbe; durch diese seine Vergleichung wird nun die Auflösung sehr leicht gemacht; Weil ihm also nach der Bedingung des Problems 8 fr. fehlen, wenn er $3x$ fr. ausgibt, so ist sein ganz Vermögen, das er bey sich hat, $= 3x - 8$. gibt er aber einem jeglichen Bettler 2 fr. so gibt er in allem $2x$ fr. aus, und behält noch 3. Nun ist $3x - 8 - 2x = x - 8$; dieser Rest aber heißt in der Aufgab 3 fr. folglich ist $x - 8 = 3$. und $x = 3 + 8 = 11$. Also waren es 11. Bettler, und sein Geld bestand in 25. fr.

Ein Exempel, welches mit dem §. 128. gegeben, eine Aehnlichkeit hat, ist folgendes. Eine Athenienserin gieng in den Tempel Jupiters, und bat, er möchte ihr Geld, das sie bey sich hätte, verdoppeln; Jupiter that, und die Frau opferte

zu Erkenntlichkeit 3 fl.; (dann wir wol-
len die griechische Münzsorten mit deut-
schen Rahmen ausdrücken.) Mit dem
Rest gieng sie in den Tempel des Apollo,
bate ein gleiches, und opferte zu Dank-
sagung für die Verdopplung ihres Geld-
es abermal 3 fl.; endlich kam sie in den
Tempel der Minerva, und trug ihre ers-
te Bitte auch hier vor; sie wurde noch
einmal befriediget, da sie dann ein glei-
ches Opfer mit 3 fl. in Minervens Tem-
pel zurück liesse. Als sie nach Haus kam,
und ihr Geld zehlen wollte, so fand sie
mit Verwunderung, daß sie der Verdopp-
lung ungeachtet, nicht mehr als einen
Gulden heimgebracht habe. Nun frage
man, wie viel sie anfänglich Geld gehabt
habe. Wir wollen ihr bey sich gehabtes
Vermögen x nennen, das wurde erstlich
vom Jupiter verdoppelt, folglich war es
 $2x$, und weil sie davon 3 fl. opferte, so
gieng sie mit $2x - 3$ fl. in den Tempel des
Apollo, hie wurde dieser Rest wieder ver-
doppelt; sie bekame daher $2(2x - 3)$
oder $4x - 6$, und opferte davon wieder
3 fl.; folglich gieng sie mit $4x - 6 - 3$
 $= 4x - 9$ fl. hinweg. u. s. w.

Also erstlich hatte sie

Jupiter duplirt es,

Sie opfert 3 fl. und behält also

Apollo duplirt den Rest,

dahero hat sie wieder

x 5

$$\begin{array}{r|l} x & \\ 2x & \\ 2x-3 & \\ 4x-6 & \end{array}$$

Sie

330 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung.

Ste opfert 3 fl. bleiben ihr also,	$4x - 9$
Minerva duplirt den Rest ;	
also hat sie ;	$8x - 18$
Ste opfert wieder 3 fl. folglich	
bringt sie heim	$8x - 21.$

Dieses heimgebrachte ist nun ein Gulden, nachdem sie es zahlte: folglich ist

$$8x - 21 = 1.$$

$$21 = 21 \text{ add.}$$

$$8x = 22.$$

$$\text{---} : 8$$

$$x = \frac{22}{8} = 2\frac{6}{8} \text{ fl.}$$

Also hatte sie vorher, ehe sie ihre geizige Bitte gethan, mehr Geld gehabt, als hernach. Man siehet leicht, daß dieses Exempel allgemein gemacht werden konnte; dann wenn sie a fl. übrig hatte, so ist $x = \frac{a+21}{8}$; Eben so können die Zahlen 21 und 8 gleichfalls allgemeiner gemacht werden. Z. E. wenn sie 3 fl. nach Haus gebracht hatte, so würde x gerade auch 3 fl. gewesen seyn, folglich würde sie weder mehr noch weniger genommen haben,

Einige Aufgaben, die Proniczahlen betreffend;

§. 132. Wir haben versprochen, der Proniczahlen noch zu gedenken; in so fern sie zu Aufgaben dienlich sind. Was eine Proniczahl seye, wissen wir; nemlich die Summe des Quadrats und seiner Wur-

Wurzel ist allemal eine Proniczahl. Nun will man wissen, wie man die Pronicwurzel finde. Es seye

$$x^2 + x = a \quad \text{quadratische Gleichung.}$$

Folglich

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \\ x^2 + x + \frac{1}{4} &= a + \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{2} &= \sqrt{a + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{4a+1}}{2} \\ x &= \frac{1}{2}\sqrt{4a+1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für alle Pronicwurzeln. Weil nun ferner eine Proniczahl $a^2 + a$, und dieser allgemeine Ausdruck nach §. 60 $= (a + 1)a$ oder $a(a + 1)$ so siehet man, daß das Product zweyer unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen allemal eine Proniczahl ist. Z. E. $3 \cdot 4 = 12$ eine Proniczahl. Dann $3 \cdot 4 = 3 \cdot (3 + 1)$ welcher Ausdruck eine Proniczahl andeuter. Es lassen sich also durch diese Anmerkung Proniczahlen genug mit leichter Mühe erfinden; dann z. E. $4 \cdot 5 = 20$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 7$, $7 \cdot 8$, $10 \cdot 11$, $99 \cdot 100$ u. s. w. sind lauter Proniczahlen.

§. 133. Wie man algebraische Aufgaben durch geometrische Progressionen auflöse, habe ich theils §. 128. 131. theils im vierten Capitel zwar nicht ausführlich gezeigt; weil aber doch eine umständliche Anleitung für alle Progressionen daselbst gegeben wurde, so werden unsere Leser von selbst

Von denenjenigen Aufgaben, welche durch Progressionen aufgelöst werden,

selbst die dahin einschlagende Exempel
 auflösen können. Was aber die von Zeit
 und Raum, folglich auch von der Ge-
 schwindigkeit abhängende Aufgaben be-
 trifft; so dünkt mich, sie gehören in die
 Mechanik; wenigstens muß man die
 Grundbegriffe der mechanischen Wissens-
 schaften inne haben, wenn man die Ge-
 schwindigkeiten berechnen, und z. E. aus
 dem gegebenen Weg, der Zeit, wenn einer
 ausgeht, und wenn ein anderer ihm nach-
 geschickt wird, auch der Geschwindigkeit
 beeder Läufer den Punkt und die Zeit be-
 stimmen solle, wo der eine den andern ein-
 holt, u. s. w. Wir wollen daher auch
 diese Aufgaben übergehen. Eben so könn-
 te man die Frage, wo und wie oft der Mi-
 nutenzeiger den Stundenzeiger in einer
 Uhr decke, auf gleiche Weise auflösen.
 Er wird ihn nemlich eilftmal bedecken, das
 erstemal innerhalb $1\frac{1}{11}$, das zweytemal
 innerhalb $2\frac{2}{11}$, das drittemal $3\frac{3}{11}$, u. s. w.
 Das letzte und eilftemal in $11\frac{10}{11}$ Stund,
 das ist um 12 Uhr. Dann von dem
 Punkt 12 geht die Rechnung an. Die
 Aufgaben mit Vermischung der Weine
 gehören auch hieher; dazu braucht man
 aber nicht weitere Umstände zu wissen;
 weil sie nun sehr leicht, und zuweilen durch
 die Regel Detri aufgelöst werden könn-
 en; so wollen wir uns nicht damit auf-
 halten. Wir handeln daher nur wie

zwey

zwey Worten noch von unbestimmten Aufgaben.

§. 134. Wann man auf eine Frage von unbestimmten vielerley richtige Antworten geben kann, so ist sie unbestimmt. Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit den unbestimmten Aufgaben. Soll ich zu 2 und 6 die dritte und vierte Proportionalzahl suchen, oder einen Bruch finden, der $\frac{2}{3}$ gleich ist; so werde ich die Menge finden können; welche alle durch $\frac{2m}{6m}$ ausgedruckt werden.

Dann $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{8}{24}$, u. s. w. sind lauter Brüche, die dem obigen gleich sind. Folglich ist die Aufgabe unbestimmt. Diese unbestimmte Aufgaben können nun auf mancherley Weise vorgetragen werden, je nachdem man die Frage richtet. Z. E. man will zwey Zahlen haben, deren Summe und Product einer gegebenen Zahl a gleich seyen, so wird nach der Bedingung des Problems seyn, wenn die zwey gesuchte Zahlen x und y genannt werden $xy + x + y = a$ folglich

$$xy + x = a - y, \text{ da nun}$$

$$xy + x = (y + 1)x \text{ nach §. 60. so ist}$$

$$x = (a - y) : y + 1.$$

y mag nun bedeuten, was es will, so wird die Frage aufgelöst seyn. Wenn z. E. $y = 2$, so ist $x = (a - 2) : (2 + 1)$, ist

334 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

es = 3 so ist $x = (a-3):(3+1)$ u. s. w.
Will man zwei Zahlen x und y finden,
welche so beschaffen sind, daß das Qua-
drat der einen zur andern addirt, das ist
 $x^2 + y$ ein vollkommenes Quadrat seyen,
deren Wurzel $x + y$ seye, so wird

$$x^2 + y = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\text{folglich } y = 2xy + y^2 \quad \text{und}$$

$$y - y^2 = 2xy$$

$$\frac{y - y^2}{(1 - y)} : 2 = x.$$

Wenn $y = \frac{1}{2}$ so ist $x = 1 - \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$
u. s. w. Man kann also für y einen Bruch

Wie man ~~so~~ setzen was man für einen will; folglich
ist auch dieses Problem unbestimmt.
Dass es nun dergleichen unbestimmter
Aufgaben eine Menge gebe, wird man
leicht begreifen; wer sich üben will, kann
sich also selbst nach Belieben solche auf-
geben. Wir wollen daher unsere Leser
auch damit nicht aufhalten. Wenn sie
nur wissen, was man unter den unbes-
timmten Aufgaben versteht. Ich glaub-
e wenigstens, ich habe den Begriff das
von hinlänglich erklärt. Dann er wird
uns in der Geometrie bey den sogenann-
ten geometrischen Orten wiederum vor-
kommen, und zu allerhand schönen Auf-
gaben Anlaß geben. Da nun in der all-
gemeinen Arithmetik, welche im arabis-
chen Algebra heisset, nichts weiter vor-
kommt,

kommt, das zu wissen nöthig ist, so dar-
 fen wir jezo diesen ersten Theil aller ma-
 thematischen Wissenschaften beschließen.
 Unsere Leser werden sich übrigens über
 seine Grösse nicht beschweren; dann wir
 haben ihnen nicht eine bloße Rechenkunst,
 sondern die ganze Algebra nach ihren
 Hauptregeln in die Hände geliefert; da-
 bey aber mit Fleiß den arabischen Nah-
 men vermieden, weil es Leute gibt, wel-
 che durch die Eitelkeit ihres Wissens auf
 diesen arabischen Nahmen so stolz wer-
 den, daß sie dem ganzen Geschlechte der
 übrigen Gelehrten Troz bieten, wenn sie
 sich einbilden, sie seyen Algebraisten und
 Philosophen. Der Nahme Arithmetik
 ist daher viel bescheidener. Darum ha-
 ben wir ihn vorgezogen. Damit man
 uns aber für keine mathematische Son-
 derlinge halte, so melden wir diß einige
 noch, daß selbst der grosse Newton eine
 vollständige Algebra unter dem Titel
 arithmetica universalis geschrieben
 habe.



Inhalt

Inhalt der Geometrie.

§. 135.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft der Gröſſen, in ſo ferne ſie durch Figuren ausgedruckt werden, ſolglich eine Länge, Breite und Höhe haben, oder Linien, Flächen, und Körper ſind; davon handelt man

I. überhaupt von der dreifachen Ausmeſſung der Körper inſgemein, und zwar

- 1) nach dem Längenmaaß
- 2) nach dem Flächenmaaß
- 3) nach dem Körpermaaß,

II. inſbesondere von Beſtimmung und Ausmeſſung einiger wichtigen Theile der Gröſſen, deren Maaß noch beſondere Regeln erfordert, und zwar

- 1) in der Trigonometrie von dem Maaß der Dreiecke,
- 2) In der Geometrie der krummen Linien von den Kegelschnitten oder Coniſchen Sectionen, neſt noch einigen andern Gattungen der krummen Linien, wie auch von ſo genannten geometriſchen Orten,

u. ſ. w.

III.

III, Von der Fluxionenrechnung oder von der Kunst zu differentiiren und zu integriren, als welche beedes der allgemeinen und besondern Geometrie zu statten kommt, auch aus Betrachtung der geometrischen Figuren erfunden worden ist, folglich zur Geometrie mit Grund gerechnet wird,



I. Cap.

Von der dreysfachen Ausmessung der Körper überhaupt,

§. 136,

Wenn man sich einen richtigen Begriff von den geometrischen Größen bilden will, so muß man nicht von Punkten, sondern bey dem andern Ende von Körpern anfangen. Körper sind vorhanden, und man stellt sich selbst in der Geometrie als etwas zusammenhängendes, und dergestalten vor, daß, wo ein Theil aufhört, sogleich der andere unmittelbar anfängt. Das ist das sogenannte Continuum. Ein Körper geht nicht ohne Ende fort; er hat seine Grenzen, und diese Grenzen heißt man

¶

Fl.

was Flächen, Flächen. Die Fläche ist da, wo der Körper aufhört, und also kein Theil vom Körper; dann wo noch ein Theil vom Körper vorhanden ist, da hört er nicht auf. Wo Flächen aufhören, sind Linien, und wo Linien aufhören, Punkte. Der Punkt kann also nicht eher gedacht und vorgestellt werden, es sey dann, daß es Linien, Flächen und Körper gebe. Warum es Punkte gebe; ferne aber eine stetige Ausdehnung vorhanden ist, die ihre Grenzen hat, so müssen sich diese Grenzen endlich in Punkte verlieren. Punkte sind also nichts, als die letzte Grenzen der Körper; dann Körper heißt man in der Geometrie alles dasjenige, was in die Länge, Breite und Höhe ausgedehnt ist. Die Grenzen der Körper sind Flächen; sie haben also eine Länge und Breite, aber keine Höhe, sonst wären sie keine Grenzen, sondern Theile des Körpers, oder wiederum Körper. Die Grenzen der Flächen sind Linien; sie haben also eine Länge, aber keine Breite, sonst wären sie Theile der Flächen, oder wiederum wirkliche Flächen. Die Grenzen der Linien sind Punkte; sie haben also keine Länge, sonst wären sie Theile der Linien, folglich wiederum Linien, und keine Punkte. Aus gleichem Grunde erhellt, daß die Punkte noch vielweniger eine Breite und Dicke haben, sonst wären sie Flächen oder gar Körper, und könnten

ten daher nicht die äußerste und letzte^{be}, und das
Grenzen aller Körper heißen. Darum sagt^{hero} man, ein Punkt sey untheilbar, und die^{bar} genannt
ist Untheilbarkeit wird der Verstand auswerde?
der gegebenen Erklärung leicht begreifen.

Eben so wird man auch aus den bishe^{Ob eine Linie}
rigen unlaugbaren Gründen einsehen, aus Punkten
warum eine Linie nicht aus Punkten be^{bestehen könn}
stehen könne, oder warum die Punkte kei-

ne Theile der Linien seyen, und wie die
sonst hier einem vorkommende Einwur-
dungen auf einmal durch die gegebene Er-

klärung abgeschnitten werden. Insge^{Was von der}

mein sagt man, eine Linie entstehe durch^{Erklärung}

einen bewegten Punkt, oder der Weg, durch die Be-

den ein Punkt durch seine Bewegung zu^{wegung eines}

rück lege, sey eine Linie. So viel rich^{Punkts zu}

tiges dieser Ausdruck auch haben mag, so

gab er doch je und je zu irrigen Gedan-

ken Anlaß genug. Dann davon will ich^{und wie diese}

nicht reden, daß diese Erklärung den Be^{Erklärung}

griff einer Linie schon voraussetze, weil^{den Begriff}

sich die Bewegung eines Punktes ohne ei^{der Linie}

ne gewisse Richtung nicht gedenken läßt, se^{schon voraus}

eine Richtung aber, wornach er sich be-

wegt, allemal eine Linie ist; sondern das

solle jezo gezeigt werden, wie die letztere

Erklärung einen ganz natürlich auf die^{woher es}

Gedanken bringe, eine Linie bestehe aus

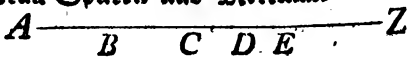
Punkten. Ein Punkt beschreibt durch^{komme, daß}

seine Bewegung eine Linie; wann sich al-^{manche sich}

so der Punkt A nach Z bewegt, so läßt er

einbilden, die überall Spuren und Merkmale

Linien beste,



ben aus an in B, C, D u. s. w. von sich zurücke;
 einander folglich wird die Summe aller dieser
 gränzenden Merkmale, das ist die Summe aller Punk-
 Punkten, und te, zusammen genommen, die Linie AZ
 wie sie ihre bestimmen. Nun will ich zeigen, wie
 Meinung man auf diese Erklärung der Linie gekom-
 mit Schein, men ist. Die Linie AZ kann eher noch
 gründen un, aufhören, als erst in Z ; sie kann z. E. in
 terfügen. B, C, D u. s. w. aufhören; wo sie nun
 aufhört, da gibt es Punkte. Ja weil
 sie, wie wir hören werden, unendlich
 theilbar ist, so kann sie an unendlich viel
 Orten aufhören; folglich gibt es in der
 Linie AZ unendlich viele Punkten. Dem-
 nach ist es eben so viel, als wenn der
 Punkt A sich nach und nach bis Z bewege-
 te, und durch diese Bewegung die Linie
 erzeugte, aber auch zugleich überall Spur-
 ren seines Daseyns, das ist, Punkte zu-
 rück ließe. Nun müssen wir auf diesen
 Einwurf, durch welchen manche scharfs-
 sinnige Gelehrte sich je und je haben irre-
 machen lassen, umständlich antworten.

Beantwor-

tung dieser

Gründe, nebst

einem ans-

Die Sache hat ihre Richtigkeit. Die
 Linie AZ kann an unendlich vielen Orten
 aufhören, und wo sie aufhört, da gibt
 es Punkte; darum lassen sich unendlich
 viele Punkten in der Linie AZ gedenken.
 Das ist unlaugbar, aber die Folge ist nicht

richtig

richtig: Es gibt überall Punkte in der fährlichen
linie, darum besteht die Linie aus Punk- ^{Beweis, daß}
ten; dann wenn wir die Erklärung des Punktes in diesem Schluß für den Punkt die Linie
selbst setzen, so heißt er so: die Linie kann nicht aus
aufhören, wo man will; folglich besteht ^{Punkten be-}
sie aus den Grenzen, an welchen sie auf- ^{hört.}
hört. Diese Folge ist grundfalsch. Wir siehe, oder
wollen ein Exempel geben. Ein Capita- ^{daß die Punkt-}
list soll ein Vermögen von 100000 fl. ^{te keine Abthei-}
haben; dieses kann nun auf unendlich viel ^{le der Linien}
le Weise kleiner werden; und es bleibt ^{seyn;}
doch noch ein Vermögen. Z. E. es kann
aufhören bey 100, bey 200, bey 300,
bey 1000, bey 10000. fl. u. s. w. Die
Grenzen, wo es aufhören kann, gehören
nicht mehr zum Vermögen, sonst wären
es nicht die Grenzen, sondern noch ein
Theil des Vermögens. Wenn ich nun
sagte, weil das Vermögen von 100000 fl.
aufhören kann, wo man will, so besteht
es aus den Grenzen, wo es aufhört:
wie ungereimt wäre dieses gedacht, und
wie leicht wäre es einem reich zu werden,
wenn die Folge wahr wäre, ein Ding be-
steht aus den Grenzen, wo es aufhören
kann? Es ist noch ein Einwurf übrig.
Man sagt, die Linie *AD* solle von der Li-
nie *AE* nur so unterschieden seyn, daß nur
ein einiger Punkt den Ueberschuß ausma-
che, und folglich *D* und *E* zwey unmittel- ^{Warum es}
bar an einander gehende Punkte seyen. ^{unmöglich,}
^{daß zween}

Punkte ein- Eine solche Nachbarschaft der Punkte er-
 ander unmit- kennet die Geometrie nicht. Wir wollen
 selbar berüh-
 ren;

aber darauf antworten, und die Unmög-
 lichkeit der Bedingung zeigen. D ist die
 Grenze von AD und E die Grenze von AE .
 Zwischen E und D ist keine Entfernung,
 das ist ED hat nach der Bedingung des
 Einwurfs keine Länge mehr, weil der

und wie der Punkt E unmittelbar an D grenzet, und
 wegen eine daher keine Zwischenlinie übrig läßt.
 Linie, wenn
 sie auch un- Folglich ist DE keine Linie oder keine Ent-
 endliche mal fernung, daher $AD + DE = AD$, und
 getheilt wür- also $AE = AD$. Die beide Linien AD
 de, immer in
 Linien ge und AE sind also gleich lang, demnach
 theilt werde, hören sie an einem Orte auf; folglich ist
 daher die
 Linie unend- D und E nur ein Punkt. Hieraus ist nun
 lich theilbar- klar, daß der obige Einwurf etwas wir-
 ist.

dersprechendes in sich halte; denn es wür-
 de daraus folgen, zwei gleich lange Li-
 nien seyen nicht gleich lang. Wenn aber
 die Theile der Linien wiederum Linien sind,
 und sich so viel Linien denken lassen, als
 Punkte sind, in welchen eine Linie durch-
 schnitten wird, so ist klar, daß die Thei-
 lung der Linien ins unendliche fortgehen
 könne, weil man niemalsen auf Punkte
 kommt, sondern immer Linien erhält, wele-
 che wieder theilbar sind; daher die Linie
 unendlich theilbar ist. Das was wir bis-
 her gesagt haben, trägt der berühmte Hr.
 Prof. Kästner in einem besondern Auf-
 satz, der in des Hamb. Magazin. IV.

Band

Band. S. 46. folg. zu lesen ist, mit mehreren vor. Es wird daher unsern Lesern nicht unangenehm gewesen seyn, daß auch wir diese wichtige Grundbegriffe von Flächen, Linien und Punkten umständlich erläutert haben; weil doch ungemein viel darauf ankommt, daß man die erste Gründe aller Wissenschaften recht inne habe.

§. 137. Ehe wir weiter gehen, müßten wir auch die geometrische Sprache und Schreibkunst erläutern. Es fragt sich billig, wie man Punkte, Linien, Winkel, Figuren u. s. w. schreiben und recht lesen oder aussprechen solle. In der ersten Tafel der geom. Figuren kommen dergleichen Zeichnungen vor. Man schreibt eine Linie, wenn man an ihren beiden Enden große Buchstaben setzt, und sie her- nach zusammen verbindet, da es dann heißt, die Linie AB , die Linie AC , die Linie AE ; will man sich der Kürze befleißigen, so kann man auch eine Linie durch einen einigen kleinen Buchstaben ausdrücken, und z. E. sagen, die Linie AB solle a oder b , oder x heißen, je nachdem sie bekannt oder unbekannt, folglich erst zu suchen ist. Wir werden uns aber des ersten Ausdrucks öfters bedienen. Ein Winkel ist die Neigung zweier Linien, die in einem Punkt zusammen stoßen. Man schreibt ihn auf eine doppelte Weise.

Von der geometrischen Sprache und Schreibkunst.

Tab. I. Wie man eine Linie schreibt und ausspricht.

Tab. I. Die Art einen Winkel zu schreiben.

und aus-
drucken, weil
es auf eine
doppelte Wei-
se geschehen
kann,

erste Art,

zweite Art
des Aus-
drucks

Wie ein Drey-
eck geschrie-
ben werde,

Tab. I.
Fig. 8.

Dann entweder braucht man drey größ-
sere Buchstaben, und setzt sie an die Gren-
zen der Linien, da dann im schriftlichen
Ausdruck derjenige Buchstabe jedesmal
in die Mitte gesetzt wird, der an der Nei-
gung der beiden Linien steht, z. E. ABC
heißt der Winkel ACB ; und nicht ABC
oder BAC ; weil C die Neigung der be-
den Linien ausdrückt, folglich in der Mit-
te stehen muß. Die andere Art ist, wenn
man innerhalb des Winkels, wo die Nei-
gung ist, einen kleinen Buchstaben, $o, x,$
 $y, n,$ u. s. w. hineinschreibet, und sodann
sagt, der Winkel o , der Winkel x , u. s. w.
beede Schreibarten werden gebraucht, je
nachdem die Schicklichkeit der Rechnung
es erfordert. Ein Dreyeck wird durch die
an den drey Ecken der Figur benzesetzte
und sodann zusammengeschriebene größ-
sere Buchstaben ausgedruckt, woben ge-
meiniglich zum Unterschied von den Wink-
eln ein Δ den Buchstaben vorangesetzt
wird. Z. E. das ΔABC , heißt das
Dreyeck ABC . Da es dann gleichgültig
ist, wie die Buchstaben verbunden wer-
den, ob sie ABC , oder ACB , oder CAB
u. s. w. heißen. Wie man den Inhalt
eines Dreyecks ausdrücke, werden wir an
seinem Ort zeigen; dann wenn die Grund-
linie b ; und die Höhe a heißet, so ist der
Inhalt $\frac{ab}{2}$; dieses aber gehört noch nicht

hier

hieser. Einem Viereck werden an den vier Ecken gleichfalls größere Buchstaben gegeben, welche sodann im Schreiben zusammengesetzt werden, z. E. das Viereck *ABCD*; wenn man nicht gern so viel Buchstaben schreibt, so setzt man zuweilen die einander kreuzweis entgegen stehende Buchstaben zusammen, und sagt das Viereck *AC* oder *DB*. u. s. w. wie man es durch die Multiplication der Grundlinie *b*, in die Höhe *a*, welches *ab* gibt, u. s. w. ausdrücken könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Ein Bogen, oder überhaupt eine krumme Linie, wird wie eine gerade Linie geschrieben und ausgesprochen; so sagt man z. E. der Bogen *AS*, der Bogen *SR* u. s. w. Punkte werden durch einzelne Buchstaben angezeigt; so sagt man der Mittelpunkt *C*, der Punkt *A*, der Punkt *B* u. s. w. Das sind ben nahe die vornehmste Ausdrücke, die man sich in dem geometrischen Alphabet zuerst bekannt machen muß. Wir werden, wenn wir weiter kommen, wie ben der Arithmetik, also auch in der Geometrie die noch rückständige Ausdrücke nach und nach in derselben Ordnung vollends hinzuthun, in welcher sie erklärt und von den Lesern verstanden werden können. Anfänger haben inzwischen an dem bisherigen genug.

wie ein Viereck,

Tab. II.
Fig. 25.

ferner wie ein Bogen oder eine krumme Linie über,

Tab. I.
Fig. 4.

hauert, und wie die Punkte ausgedrückt werden.

Inhalt der Geometrie.

§. 133.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft der Gröſſen, in ſo ferne ſie durch Figuren ausgedruckt werden, folglich eine Länge, Breite und Höhe haben, oder Linien, Flächen, und Körper ſind; das hero handelt man

I. überhaupt von der dreysfachen Ausmeſſung der Körper inſgemein, und zwar

- 1) nach dem Längenmaaß
- 2) nach dem Flächenmaaß
- 3) nach dem Körpermaaß,

II. inſbeſondere von Beſtimmung und Ausmeſſung einiger wichtigen Theile der Gröſſen, deren Maaß noch beſondere Regeln erfordert, und zwar

- 1) in der Trigonometrie von dem Maaß der Dreyecke,
- 2) In der Geometrie der krummen Linien von den Kegelnſchnitten oder Coniſchen Sectionen, nebst noch einigen andern Gattungen der krummen Linien, wie auch von ſo genannten geometriſchen Orten,

u. ſ. w.

III.

III. Von der Fluxionenrechnung oder von der Kunst zu differentiiren und zu integriren, als welche beedes der allgemeinen und besondern Geometrie zu statten kommt, auch aus Betrachtung der geometrischen Figuren erfunden worden ist, folglich zur Geometrie mit Grund gerechnet wird,



I. Cap.

Von der dreysfachen Ausmessung der Körper überhaupt,

§. 136.

Wenn man sich einen richtigen Begriff von den geometrischen Größen bilden will, so muß man nicht von Punkten, sondern bey dem andern Ende von Körpern anfangen. Körper sind vorhanden, und man stellt sich selbst in der Geometrie als etwas zusammenhängendes, und dergestalten vor, daß, wo ein Theil aufhöret, sogleich der andere unmittelbar anfängt. Das ist das sogenannte Continuum. Ein Körper geht nicht ohne Ende fort; er hat seine Grenzen, und diese Grenzen heißt man

Von dem Begriff der geometrischen Größen,

was das Continuum sey,

was Flächen, Flächen. Die Fläche ist da, wo der Körper aufhört, und also kein Theil vom Körper; dann wo noch ein Theil vom Körper vorhanden ist, da hört er nicht auf. Wo Flächen aufhören, sind Linien, und wo Linien aufhören, Punkte. Der Punkt kann also nicht eher gedacht und vorgestellt werden, es sey dann, daß es Linien, Flächen und Körper gebe. Warum es Punkte gebe; ferne aber eine stetige Ausdehnung vorhanden ist, die ihre Grenzen hat, so müssen sich diese Grenzen endlich in Punkte verlieren. Punkte sind also nichts, als die letzte Grenzen der Körper; dann Körper heißt man in der Geometrie alles dasjenige, was in die Länge, Breite und Höhe ausgebreht ist. Die Grenzen der Körper sind Flächen; sie haben also eine Länge und Breite, aber keine Höhe, sonst wären sie keine Grenzen, sondern Theile des Körpers, oder wiederum Körper. Die Grenzen der Flächen sind Linien; sie haben also eine Länge, aber keine Breite, sonst wären sie Theile der Flächen, oder wiederum wirkliche Flächen. Die Grenzen der Linien sind Punkte; sie haben also keine Länge, sonst wären sie Theile der Linien, folglich wiederum Linien, und keine Punkte. Aus gleichem Grunde erhellet, daß die Punkte noch vielweniger eine Breite und Dicke haben, sonst wären sie Flächen oder gar Körper, und könnten

ten daher nicht die äußerste und letzte^{be}, und das
Grenzen aller Körper heißen. Darum sagt^{hero} man, ein Punkt sey untheilbar, und die^{bar} genant
seiner Untheilbarkeit wird der Verstand auswerdet
der gegebenen Erklärung leicht begreifen.

Eben so wird man auch aus den bishe^{Ob eine Linie}
rigen unlaugbaren Gründen einsehen, aus Punkten
warum eine Linie nicht aus Punkten be^{bestehen könne}
stehen könne, oder warum die Punkte kei-

ne Theile der Linien seyen, und wie die
sonst hier einem vorkommende Einwur-
dungen auf einmal durch die gegebene Er-
klärung abgeschnitten werden. Insges^{Was von der}

mein sagt man, eine Linie entstehe durch^{Erklärung}
einen bewegten Punkt, oder der Weg, durch die Be-
den ein Punkt durch seine Bewegung zu^{wegung eines}
rück lege, sey eine Linie. So viel rich^{Punkts zu}

tiges dieser Ausdruck auch haben mag, so
gab er doch je und je zu irrigen Gedan-
ken Anlaß genug. Dann davon will ich^{und wie diese}

nicht reden, daß diese Erklärung den Be^{Erklärung}
griff einer Linie schon voraussetze, weil^{den Begriff}
sich die Bewegung eines Punkts ohne ei^{der Linie}
ne gewisse Richtung nicht gedenken läßt, se^{schon voraus}

eine Richtung aber, wornach er sich be-
wegt, allemal eine Linie ist; sondern das
solle jezo gezeigt werden, wie die letztere
Erklärung einen ganz natürlich auf die^{woher es}

Gedanken bringe, eine Linie bestehe aus
Punkten. Ein Punkt beschreibt durch^{komme, daß}
seine Bewegung eine Linie; wann sich al^{manche sich}
so der Punkt A nach Z bewegt, so läßt er
N 2 übers

einbilden, die überall Spuren und Merkmale

Linien beste, $A \text{---} B \text{---} C \text{---} D \text{---} E \text{---} Z$

ben aus an in B, C, D u. s. w. von sich zurücke;
 einander folglich wird die Summe aller dieser
 gränzenden Merkmale, das ist die Summe aller Punk-
 punkten, und te, zusammen genommen, die Linie AZ
 wie sie ihre bestimmen. Nun will ich zeigen, wie
 Meinung man auf diese Erklärung der Linie gekom-
 mit Schein, men ist. Die Linie AZ kann eher noch
 gründen un, aufhören, als erst in Z ; sie kann z. E. in
 terfügen. B, C, D u. s. w. aufhören; wo sie nun
 aufhört, da gibt es Punkte. Ja weil
 theilbar ist, so kann sie an unendlich viel
 Orten aufhören; folglich gibt es in der
 Linie AZ unendlich viele Punkten. Dem-
 nach ist es eben so viel, als wenn der
 Punkt A sich nach und nach bis Z beweg-
 te, und durch diese Bewegung die Linie
 erzeugte, aber auch zugleich überall Spur-
 ren seines Daseyns, das ist, Punkte zu-
 rück ließe. Nun müssen wir auf diesen
 Einwurf, durch welchen manche scharf-
 sinnige Gelehrte sich je und je haben irre-
 machen lassen, umständlich antworten.

Beantwor-

tung dieser

Gründe, nebst

einem aus-

Die Sache hat ihre Richtigkeit. Die
 Linie AZ kann an unendlich vielen Orten
 aufhören, und wo sie aufhört, da gibt
 es Punkte; darum lassen sich unendlich
 viele Punkten in der Linie AZ gedenken.
 Das ist unlaugbar, aber die Folge ist nicht
 rich-

richtig: Es gibt überall Punkte in der fädelichen
linie, darum besteht die Linie aus Punk- ^{Beweis, daß}
ten; dann wenn wir die Erklärung des Punktes in diesem Schluß für den Punkt die Linie
selbst setzen, so heißt er so: die Linie kann nicht aus
aufhören, wo man will; folglich besteht sie aus den Grenzen, an welchen sie auf- ^{Punkten be-}
hört. Diese Folge ist grundfalsch. Wir ^{siehe, oder}
wollen ein Exempel geben. Ein Capita- ^{daß die Punkt-}
list soll ein Vermögen von 100000 fl. haben; dieses kann nun auf unendlich vie- ^{le keine Theile}
le Weise kleiner werden; und es bleibt ^{le der Linien}
doch noch ein Vermögen. Z. E. es kann
aufhören bey 100, bey 200, bey 300, ^{seyn;}
bey 1000, bey 10000. fl. u. s. w. Die
Grenzen, wo es aufhören kann, gehören
nicht mehr zum Vermögen, sonst wären
es nicht die Grenzen, sondern noch ein
Theil des Vermögens. Wenn ich nun
sagte, weil das Vermögen von 100000 fl.
aufhören kann, wo man will, so besteht
es aus den Grenzen, wo es aufhört:
wie ungereimt wäre dieses gedacht, und
wie leicht wäre es einem reich zu werden,
wenn die Folge wahr wäre, ein Ding be-
steht aus den Grenzen, wo es aufhören
kann? Es ist noch ein Einwurf übrig.
Man sagt, die Linie *AD* solle von der Li-
nie *AE* nur so unterschieden seyn, daß nur
ein einiger Punkt den Ueberschuß ausma-
che, und folglich *D* und *E* ^{Warum es}
zwey unmittel- ^{unmöglich,}
bar an einander gehende Punkte ^{daß zwey}
seyn.

Punkte ein- Eine solche Nachbarschaft der Punkte er-
 ander unmit- kennen die Geometrie nicht. Wir wollen
 telbar berüh- ren; aber darauf antworten, und die Unmög-
 ren; lichkeit der Bedingung zeigen. D ist die

Grenze von AD und E die Grenze von AE .
 Zwischen E und D ist keine Entfernung,
 das ist ED hat nach der Bedingung des
 Einwurfs keine Länge mehr, weil der
 und wie beß- Punkt E unmittelbar an D grenzet, und
 wegen eine dahero keine Zwischenlinie übrig läßt.
 Linie, wenn Folglich ist DE keine Linie oder keine Ent-
 sie auch un- fernung, dahero $AD + DE = AD$, und
 endliche mul- also $AE = AD$. Die beede Linien AD
 getheilt wür- und AE sind also gleich lang, demnach
 de, immer in theilt werde, hören sie an einem Orte auf; folglich ist
 Linien ge- D und E nur ein Punkt. Hieraus ist nun
 theilt werde, D und E nur ein Punkt. Hieraus ist nun
 dahero die lich theilbar- klar, daß der obige Einwurf etwas wis-
 Linie unend- ist.

dersprechendes in sich halte; denn es wür-
 de daraus folgen, zwei gleich lange Li-
 nien seyen nicht gleich lang. Wenn aber
 die Theile der Linien wiederum Linien sind,
 und sich so viel Linien denken lassen, als
 Punkte sind, in welchen eine Linie durch-
 schnitten wird, so ist klar, daß die Thei-
 lung der Linien ins unendliche fortgehen
 könne, weil man niemalsen auf Punkte
 kommt, sondern immer Linien erhält, we-
 che wieder theilbar sind; dahero die Linie
 unendlich theilbar ist. Das was wir bis-
 her gesagt haben, trägt der berühmte Hr.
 Prof. Kästner in einem besondern Auf-
 satz, der in des Hamb. Magazin. IV.

Band

Band. S. 46. folg. zu lesen ist, mit mehreren vor. Es wird daher unsern Lesern nicht unangenehm gewesen seyn, daß auch wir diese wichtige Grundbegriffe von Flächen, Linien und Punkten umständlich erläutert haben; weil doch ungemein viel darauf ankommt, daß man die erste Gründe aller Wissenschaften recht inne habe.

§. 137. Ehe wir weiter gehen, muß wir auch die geometrische Sprache und Schreibekunst erläutern. Es fragt sich billig, wie man Punkte, Linien, Winkel, Figuren u. s. w. schreiben und recht lesen oder aussprechen solle. In der ersten Tafel der geom. Figuren kommen dergleichen Zeichnungen vor. Man schreibt eine Linie, wenn man an ihren beiden Enden groſſe Buchstaben setzt, und sie her nach zusammen verbindet, da es dann heißt, die Linie *AB*, die Linie *AC*, die Linie *AE*; will man sich der Kürze beſleißigen, so kann man auch eine Linie durch einen einigen kleinen Buchstaben ausdrücken, und z. E. sagen, die Linie *AB* solle *a* oder *b*, oder *x* heißen, je nachdem sie bekannt oder unbekannt, folglich erst zu suchen ist. Wir werden uns aber des ersten Ausdrucks öfters bedienen. Ein Winkel ist die Neigung zweier Linien, die in einem Punkt zusammen stoßen. Man schreibt ihn auf eine doppelte Weise.

Von der geometrischen Sprache und Schreibekunst.

Tab. I. Wie Fig. 2. man eine Linie schreibe und ausspreche,

Tab. I. Die Fig. 3. Art einen Winkel zu schreiben

und ausgedruckt, welches auf eine doppelte Weise geschehen kann,

erste Art,

zweite Art
des Ausdrucks

Wie ein Dreieck geschrieben werden werde;

Tab. I.
Fig. 8.

Dann entweder braucht man drey größere Buchstaben, und setzt sie an die Enden der Linien, da dann im schriftlichen Ausdruck derjenige Buchstabe jedesmal in die Mitte gesetzt wird, der an der Neigung der beiden Linien steht, z. E. ABC heißt der Winkel ACB ; und nicht ABC oder BAC ; weil C die Neigung der beiden Linien ausdrückt, folglich in der Mitte stehen muß. Die andere Art ist, wenn man innerhalb des Winkels, wo die Neigung ist, einen kleinen Buchstaben, $o, x, y, n, u.$ s. w. hineinschreibet, und sodann sagt, der Winkel o , der Winkel x , u. s. w. beide Schreibarten werden gebraucht, je nachdem die Schicklichkeit der Rechnung es erfordert. Ein Dreieck wird durch die an den drey Ecken der Figur benegesezte und sodann zusammengeschriebene größere Buchstaben ausgedruckt, wobei gemeinlich zum Unterschied von den Winkeln ein Δ den Buchstaben vorangesezt wird. Z. E. das ΔABC , heißt das Dreieck ABC . Da es dann gleichgültig ist, wie die Buchstaben verbunden werden, ob sie ABC , oder ACB , oder CAB u. s. w. heißen. Wie man den Inhalt eines Dreiecks ausdrücke, werden wir an seinem Ort zeigen; dann wenn die Grundlinie b ; und die Höhe a heißet, so ist der Inhalt $\frac{ab}{2}$; dieses aber gehört noch nicht

hier

hieser. Einem Viereck werden an den vier Ecken gleichfalls grössere Buchstaben gegeben, welche sodann im Schreiben zusammengesetzt werden, z. E. das Viereck *ABCD*; wenn man nicht gern so viel Buchstaben schreibt, so setzt man zuweilen die einander creuzweis entgegen stehende Buchstaben zusammen, und sagt das Viereck *AC* oder *DB*. u. s. w. wie man es durch die Multiplication der Grundlinie *b*, in die Höhe *a*, welches *ab* gibt, u. s. w. ausdrücken könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Ein Bogen, oder überhaupt eine krumme Linie, wird wie eine gerade Linie geschrieben und ausgesprochen; so sagt man z. E. der Bogen *AS*, der Bogen *SR* u. s. w. Punkte werden durch einzelne Buchstaben angezeigt; so sagt man der Mittelpunkt *C*, der Punkt *A*, der Punkt *B* u. s. w. Das sind bey nahe die vornehmste Ausdrücke, die man sich in dem geometrischen Alphabet zuerst bekannt machen muß. Wir werden, wenn wir weiter kommen, wie bey der Arithmetik, also auch in der Geometrie die noch rückständige Ausdrücke nach und nach in derselben Ordnung vollends hinzuthun, in welcher sie erklärt und von den Lesern verstanden werden können. Anfänger haben inzwischen an dem bisherigen genug.

wie ein Viereck,

Tab. II.
Fig. 25.

ferner wie ein Bogen oder eine krumme Linie über,

Tab. I.
Fig. 4.

hauert, und wie die Punkte ausgedruckt werden.

Der erste
Theil der
dreysfachen
Ausmessung
begreift das
Längenmaas.

Wie man ei-
ne Länge oder
Linie messen
könne;

und besons-
ders wie die
gerade und
krumme wie
die krumme
Linien in Ab-
sicht auf ihr
Maas anzu-
sehen seyen.

§. 138. Nun kommen wir der Hauptsache näher, und tragen von der dreysfachen Ausmessung der Körper denjenigen Theil zuerst vor, der das Längenmaas oder die Longimetrie in sich begreift. Eine Länge wird durch eine Länge, wie eine Breite durch eine Breite und ein Körper durch einen Körper ausgemessen. Da sich nun eine bloße Länge allemal durch eine Länge ausdrücken läßt, so siehet man; daß Linien und Längen hier einerley heißen, folglich das allgemeine Maas in der Longimetrie Linien seyen. Nun gibt es gerade und krumme Linien; die gerade werden durch gerade Linien ausgemessen; bey den krummen kommt es auf die Frage an, ob ich die Länge der Linien an und vor sich selbst, oder nur ihre Krümme, theils überhaupt, theils nach ihrer bestimmten Grösse wissen will; in jenem Fall muß ich sie gerade machen oder rectificiren; diese schwere Kunst gehört noch nicht in dieses Capitel. Im letztern Fall muß ich eine krumme Linie von ihrer Art zum Maas nehmen, daß ich sagen kann, sie gehört zu dieser oder jenen Classe der krummen Linien; dann hat diese oder jene Eigenschaft, welche die mir bekannte krumme Linie auch hat. Habe ich nun dieses einmal gefunden, so suche ich die Grösse der krummen Linie, das ist, die Verhältniß des auszumessenden Theils zu der ganzen krum-

krummen Linie, von deren Gattung der
 gegebene Theil ist. Auch diese Kunst ist,
 wenn ich die einige Circellinie ausnehme,
 jetzt noch zu hoch, und kann in dem ge-
 genwärtigen Capitel nicht vorgetragen
 werden. Wir werden daher nur von
 geraden und Circelförmigen Linien han-
 deln. Eine gerade Linie ist der kürzeste
 Weg, oder die kürzeste Entfernung zwi-
 schen zweyen Punkten; Man muß sich
 aber die mathematische Linie als eine sol-
 che Linie vorstellen, die durch alles drin-
 get, und von dem härtesten Marmor nicht
 aufgehalten wird. So ist z. E. der kür-
 zeste Weg von dem Punkt, worauf ich auf-
 stehe, zu meinen Gegenfüßlern in America
 die Linie, die mitten durch die Erde durch-
 gehet, und sich nichts in den Weg legen
 läßt; man siehet daher schon, wie der
 kürzeste Weg hier verstanden werde. Ein
 Seefahrer kann nicht anders als durch
 eine zu Wasser beschriebene krumme Linie
 nach America kommen; und doch ist die,
 wenn er durch keinen Sturm zerschlagen
 wird, der kürzeste Weg, der ihm äußerlich
 möglich ist. Allein er macht ihn auch
 wirklich, und nicht bloß in Gedanken, wie
 der Meßkünstler, der seine mathematische
 Linie bloß in Gedanken durch die Erde
 hindurch zieht. Inzwischen siehet man
 schon, daß solche mathematische Linien
 möglich sind; dann was sich denken läßt,
 ist

Warum man
 in diesem Ca-
 pitel nur von
 geraden, und
 unter den
 krummen Li-
 nien, von kei-
 nen andern
 als von Circ-
 cellinien
 handle.

Was eine ge-
 rade Linie
 sey;

und wie man
 sich die ma-
 thematische
 Linie vorstel-
 len müsse;

wie auch, was
 man unter
 dem kürzesten
 Weg im ab-
 soluten und
 mathema-
 tischen Begriff
 verstehe;

Möglichkeit
der mathematischen
Linien,

Warum es
nur eine Classe
von geraden
Linien gebe, und
warum durch
zween Punkte
allezeit eine
gerade Linie,
nicht aber eine
krumme,
bestimmt
werde.

Warum es so
mancherley
krumme Linien
gebe;

und wie man
sich selbige
durch die Betrachtung
der Natur be-
kannt machen
könne;

ist möglich; Nun läßt sich eine Linie in Gedanken durch die Erde ziehen; folglich sind dergleichen mathematische Linien nichts widersprechendes. Weil ferner zwischen zween Punkten nur ein einiger Weg sich denken läßt, der der aller kürzeste heißet, so ist ganz natürlich, daß es nur eine einzige Classe von geraden Linien gebe, und daß folglich in mathematischem Verstand keine mehr oder weniger gerade als die andere seye. Eben so erhellet auch, daß eine gerade Linie durch zwey Punkte vollkommen bestimmt werde, weil zwischen zween Punkten nicht mehr als eine gerade Linie möglich ist. Hingegen von krummen Linien wird es eine Menge Gattungen geben; man darf nur auf dem Papier zwey Punkte annehmen, und es versuchen, ob man nicht durch eine Menge krummer Linien von einem Punkt zum andern kommen könne. Eben so kann man durch die Betrachtung der Natur die Verschiedenheit der krummen Linien erkennen. Die Circellinie ist die allergeeinsten. Wenn ich aber nur ein Ey ansehe, so sehe ich schon eine andere Gattung von krummen Linien, welche man die Ovallinie heißet; sehe ich ein Schneckenhaus an, so sehe ich eine neue Gattung krummer Linien, welche deswegen Schneckenlinien genannt werden u. s. w. Da es nun so eine unzählbare Menge von

von krummen Linien gibt; so ist es gar kein Wunder, daß die Erfindungskunst besonders in der sogenannten höhern Geometrie immer mehr bereichert, und mit neuen Exempeln vermehrt wird. Weil aber keine gemeiner ist, als die Eirkellinie, so hat man sie sogleich schon von Alters her je und je in den ersten Gründen der Geometrie vorgetragen, und das mit desto größerm Recht, weil sie das Maas der Winkel zu bestimmen unumgänglich nöthig, und die Lehre von den Winkeln eine der ersten und vornehmsten Lehren in der Geometrie ist; wie wir sogleich hören werden.

§. 139. Gerade Linien werden durch gerade Linien gemessen. Dann messen heißt nichts anders, als anzeigen, wie oft eine Linie in der andern enthalten seye, oder wie sich eine gegebene Linie zu einer andern verhalte. Man nimmt also zum Maas, daß eine Linie an, welche man eine Ruthen nennt, und durch das hinten angehängte Zeichen 1° schreibt; der zehente Theil einer Ruthen heißt ein Schub, und wird geschrieben $1'$, der zehente Theil eines Schubes heißt ein Zoll, und wird geschrieben $1''$, und der zehente Theil eines Zolles heißt eine Linie, und wird geschrieben $1'''$. So theilet die Geometrie ihr Längenmaas, und hat dabei den Vortheil, daß sie durch Hülfe der Decimal-

Warum die Eirkellinie gleich anfangs in den geometrischen Lehrbüchern erklärt werden mußte.

Von dem Maas der geraden Linien, an und vor sich selbst, wo man Ruthen, Schuben, Zolle, Linien, u. d. gl. gebraucht.

pro

dieser Rechnung. progression und Decimalbrüche, eine Linie nicht nur kurz ausdrücken, sondern auch, wenn man multiplicirt und dividirt, Zeit und Mühe ersparen kann. So sind z. E. 3 6 4 8 2 Linien, $36^{\circ} 4' 8'' 2'''$ das ist, 36 Ruthen, 4 Schuhe, 8 Zoll, 2 Linien. Die gemeine Feldmesser hingegen gehen von diesem Maasse ab; und man merkt fast in einem jeden Land eine Verschiedenheit; bey uns hat die Ruthe 16 Schuhe, ein Schuh 12 Zoll u. s. w. Wir werden aber künftighin die eigentlich geometrische Rechnung gebrauchen, und, wo nichts besonders angewendet wird, allemal geometrische Ruthen, Schuhe, Zoll und Linien verstehen.

Von dem Maas der Neigung zweier geraden Linien gegen einander, oder von dem Winkelmaas;

was ein Winkel heys,

und wie man hier nur von geradelinichten und nicht

§. 140. Man misst die gerade Linien nicht nur an und vor sich selbst, in so fern sie solche gerade Linien sind, sondern man kann auch ihre Verhältnisse ausmessen. Eine der ersten und vornehmsten Verhältnisse zweier geraden Linien gegen einander besteht darinnen, wenn sie durch eine gewisse Neigung gegen einander in einem Punkte endlich zusammen stossen; da man dann die Grösse dieser Neigung zu wissen verlangt. Man heisst eine solche Neigung einen geradelinichten Winkel; dann es gibt auch krummlinichte Winkel. Wir werden aber, um uns kürzer ausdrücken zu können, so oft wir das Wort Winkel ohne einen Beynahmen gebrauchen,

chen, geradelinichten Winkel darunter von krumm
 verstehen; wo wir aber, welches festen ge- linichten
 sehen wird, krummlinichte nöthig haben, Winkeln
 das letztere Benwort hinzusetzen. Nun rede;
 fragt man, wie die Neigung zweyer ger- Warum man
 raden und in einem Punkt zusammen einen Winkel
 kommender Linien gegen einander, das ist, nicht durch
 wie ein Winkel ausgemessen werde? gerade Linien
 messen könne.
 Durch eine gerade Linie kommt man hi-
 nicht zu recht. Dann wenn ich den Win-
 kel ACB durch eine gerade Linie ausmes- Tab. I.
 sen wollte, so müßte ich in der Linie AC Fig. 3.
 und BC Punkte annehmen, und zwischen
 selbigen Linien ziehen. Nun gibt es in
 diesen beiden Linien eine Menge von Punk-
 ten. §. 136. Folglich ließe sich auch eine
 Menge von Linien ziehen, davon immer
 eine größer als die andere würde, je nach- Wie man das
 dem ich dem Punkt C mehr oder weniger bese eine
 nahe käme. Ich würde also kein bestimm- krumme Linie
 tes Maas für den Winkel ACB finden
 können. Man versucht daher die Ar- in seinem
 beit mit krummen Linien, und weil wir Maas nöthig
 in der gemeinen Geometrie keine andere
 als Eirkellinien wissen, vornemlich mit habe;
 Eirkelbögen. Dieses zu bewerkstelligen, und wie diese
 müssen wir wissen, was ein Eirkel seye; Linie die Eir-
 Ein Eirkel entsteht, wann sich eine gera- kelllinie seye;
 de Linie um einen festen Punkt herum be-
 weget. 3. E. die Linie AC solle sich um Tab. I.
 den festen und unbeweglichen Punkt C her- Fig. 4.
 um bewegen, daß sie nach und nach die
 Linie

Erklärung
 des **Eirkels**,
 und der da-
 bey vorkom-
 menden **Rad-**
 men,
 der **Periphe-**
 rie,

des **Mittel-**
 punkts,

des **Radius**,
 woben ge-
 zeigt wird,
 daß alle **Radii**
 einander
 gleich seyen,

der **Sehnen**,

des **Diameters**,
 welcher

Linie SC , RC , CB , CI bedeckt, und end-
 lich wieder in AC kommt; so wird die
 daraus beschriebene Figur ein **Eirkel**, und
 die äußerste krumme Linie $ASRBIA$ die
Peripherie des **Eirkels** genannt. Man
 kann die gegebene genetische Erklärung
 des **Eirkels** durch einen gemeinen Ver-
 such, z. E. durch einen Faden, der im-
 mer in gleicher Länge gehalten, und um
 einen Punkt herum beweget wird, leicht
 in die Übung bringen. Der Punkt C ,
 um welchen die Bewegung geschieht,
 heisset der **Mittelpunkt**. (*Centrum*.)
 Die herumbewegte Linie, (oder im Exem-
 pel, der herumbewegte Faden) heisset
 der **Radius**. Da nun diese Linie über-
 all im **Eirkel** sich selbst gleich bleibet, so
 ist klar, daß alle **Radii**, das ist, alle
 gerade Linien, die von dem **Mittelpunkt**
 an die **Peripherie** gezogen werden, ein-
 ander gleich seyen. Demnach sind
 AC , CS , CR , CB , CI , als **Radii** des
Eirkels, einander gleich. Es sind noch
 einige gerade Linien im **Eirkel** übrig.
 Eine Linie, die von einem Punkt der **Pe-**
ripherie D zum andern E gezogen wird,
 und nicht durch den **Mittelpunkt** geht,
 heisset überhaupt eine **Sehne**; (*Chorda*)
 z. E. die **Sehne** DE . Gehet sie aber
 durch den **Mittelpunkt** C , so heisset sie der
Diameter (*Durchmesser*). z. E. die Linie
 AB ; folglich ist der **Diameter** der dop-
 pelte

pelte Radius; weil $AB = AC + CB$ der doppelte
 $= 2AC$. Wenn also der Radius r heißt, Radius ist,
 so darf ich allemal für den Diameter $2r$
 setzen. Ferner ist aus gleichem Grunde u. s. w.
 der Radius allemal der halbe Diameter;
 dann $AB = 2AC$
 und daher $\frac{AB}{2} = AC$

Wenn also der Diameter a heißet, so
 wird der Radius $\frac{1}{2}a$ seyn. Die Theile Die Theile
 der Peripherie heißt man Bögen; z. E. der Periphe-
 der Bogen AS , der Bogen SR , der Bo- rie heißen
 gen RB u. s. w. Den Cirkel beschreibt über schlech-
 man durch ein unsern Lesern so bekanntes weg in der
 Instrument, daß es unnöthig wäre, es Geometrie
 erst zeichnen zu lassen. Wir merken nur Bögen;
 so viel, daß das Instrument selbst der
 Cirkel mit dem Z, (Circinus lat. und Von dem In-
 französisch Compas) die dadurch beschrie- strument,
 bene Figur aber ein Cirkel mit dem C heiß- womit ein
 se, (lat. Circulus, französisch Cercle) wird. Cirkel be-
 Die krumme Linie, das ist die Peripherie
 des Cirkels, wird in 360 gleiche Theile Warum die
 eingetheilt, weil sich diese Zahl mit vie- Peripherie
 len andern leicht und ohne Rest dividiren des Cirkels
 läßt. Diese Eintheilung ist willkürlich; Theile ge-
 dann man könnte des Cirkels Umfang theilt werde,
 eben sowohl in 1000, oder 100, oder 60
 Theile u. s. w. theilen; wir haben aber
 schon gesagt, warum man die Einthei-
 lung in 360 gewählt und vorgezogen ha-
 be. Derjenige kleine Cirkelbogen, wel-
 cher

§ 4 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

und wie ein solcher Theil ein Grad, und der sechzigste Theil eines Grades eine Minute u. s. w. genannt werde;

her der 360ste Theil von seinem ganzen Cirkel ist, heißt allemal ein Grad, und wird wie ein Längenmaas geschrieben 1° ; der sechzigste Theil eines Grades heißt eine Minute (minutum primum) und wird geschrieben $1'$, der sechzigste Theil einer Minute heißt eine Secunde (minutum secundum) und wird geschrieben $1''$, der sechzigste Theil einer Secunde heißt eine Terz, (minutum tertium) und wird geschrieben $1'''$ u. s. w. Folglich geht hier die Rechnung nach Seragesimalbrüchen, bey welchen die Zehler eins, und die Nenner in einer geometrischen Progression fortgehen, deren Exponent 60 ist, z. E. $1, \frac{1}{60}, \frac{1}{60 \cdot 60}, \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 60}$ u. s. w. Dann dieser Ausdruck heißt eben so viel, als ein Grad, eine Minute, eine Secunde, und eine Terz; folglich kann ich ganze Zahlen dafür setzen, wie bey den Decimalbrüchen, wenn ich nur die Nenner im Sinn hinzudenke, wiewohl die Nahmen Minute, Secunde, Terz u. s. w. wirklich die Nenner anzeigen; man kann daher die vier Rechnungsarten wie bey genannten Zahlen hier anbringen, wenn man nur weiß, daß allemal sechzig Minuten ein Grad, 60 Secunden eine Minute u. s. w. machen. Hier sind nun die gemeine Feldmesser der Geometrie getreuer als bey dem Längenmaas; dann überall wird der Cirkel in 360 Grade, und der Grad

Erklärung

der Seragesimalrechnung, welche

hier vorzüglich und fast allein gebraucht wird, und zu wissen nöthig ist.

Grad in 60 Minuten u. s. w. eingetheilt.

Diese Eintheilung ist bey allen Cirkeln, sie Warum ein mögen groß oder klein seyn, angenom: größer, wie men; nur sind die Grade bey einem groß: ein kleiner Cirkel, eines: Cirkel größer, als bey einem kleinen ley Anzahl u. s. w. Man siehet daher schon, wie von Graden man einen Bogen mißt, und wie seine das Maas Grösse durch die Anzahl der Grade, die eines Win: er hat, bestimmt wird. Eben so begreift kels durch die Anzahl der man, wie ein Winkel gemessen werde. Grade, die Dann zwischen den beiden Linien, wel: der zwischen che einen Winkel durch ihre Neigung be: seinen Schen: stimmen, läßt sich allemal ein Cirkelbo: keln gezogene: gen beschreiben, wenn man den einen Bogen hält, bestimmt

Schenkel des Cirkel Instruments in den Punkt C, wo die Linien zusammen stoß: Tab. I. sen, setzet, und hernach mit beliebiger fig. 5.

Eröffnung den Bogen DB beschreibt. Al: nebst einer lein jezo werden meine Leser die obige Ge: Anzeige, wie danken von den geraden Linien auch hier der Bogen anbringen und sagen, man kann eine beschrieben werden muß Menge von Punkten in den beiden Linien se.

CD und CB annehmen, und hernach Bö: Was von gen zwischen denselben beschreiben, folg: dem Einwurf lich haben wir auch hier kein bestimmtes zu halten, Maas für den Winkel, wenn wir schon wenn man die gerade Linien ausgemustert und Cir: sagt, man kelsbogen dafür angenommen haben. Es könne wi: schen den ist der Mühe wehrt, daß man darauf zween Schen: antwortet. Ich sage, es ist gleichviel, kels eines ob ich mit einer großen oder kleinen Eröf: endlich viel nung des Cirkels den Bogen beschreibe; Bögen ziehen, deren immer dann

einer grösser
als der ande-
re, folglich
seye das
Maas des
Winkels
auch im Cir-
kelbogen un-
bestimmt;

Beantwor-
tung dieser
Gedanken,
nebst einer
umständli-
chen Anzeige,
warum es
gleichviel
seye, ob man
mit einer
grossen oder
kleinen Er-
öffnung des
Cirkels den
Bogen be-
schreibe,
und wie ein
kleiner Bo-
gen zwischen
einerley
Schenkeln
des Winkels
eben so viel
Grade halte
als ein grö-
sser.

dann alle Bogen zwischen CD und CB sind in Rücksicht auf die Anzahl ihrer Grade einander gleich. Darum ist sowohl db als DB das Maas des Winkels DCB oder n . Diß wird sich bald zeigen. Man darf nur den Cirkel oder halben Cirkel vollends beschreiben, so hat man ADB und adb ; Nun ist DB ein eben so grosser Theil von seinem halben, folglich auch ganzen Cirkel ADB , als db von dem seinigen abd ist. Weil nun der grosse wie der kleine 360° enthält, so werden auch die Stücke db und DB eine gleiche Anzahl Grade und Minuten haben; nur werden die Grade von db kleiner als die von DB seyn; weil die Grade vom kleinem Cirkel überhaupt kleiner als die vom grössern sind. Daran aber ist nichts gelegen. Dann ich will nicht wissen, wie groß der rectificirte Bogen DB , oder der in eine gerade Linie zu verwandelnde Bogen DB seye, sondern wie groß er als ein Bogen seye, das ist, wie viel er Grade habe, oder der wievielte Theil er von seinem ganzen Cirkel seye? Das finde ich nun, ich mag den Cirkel mit einer grossen oder kleinen Oeffnung des Instruments beschrieben haben. Nun glaube ich, erwiesen zu haben, daß es gleichviel seye, ob man einen Winkel durch einen dem Punkt C mehr oder weniger nahen Bogen ausmesse. Warum man aber

Cir

Eirkelbögen überhaupt zu diesem Maas **Warum man**
 nöthig habe, ist aus der Natur der Win- **bloß Eirkel-**
 kel klar. Ein Winkel kann entstehen, **bogen und**
 wenn sich von zwei auf einander liegenden **keine andere**
 geraden Linien die eine von der andern **krumme Li-**
 ohne Krümme hinweg bewegt, doch so, **nien zum**
 daß sie immerdar an dem äußersten Punkt **Maas der**
 mit der andern noch zusammen hängt. **Winkel ge-**
 Durch diese Bewegung können nun keine **brauchen**
 andere als Eirkelbögen entstehen. Man **könne, wird**
 darf nur das Instrument, das der Zir- **aus der Nas-**
 kel genannt wird, nach und nach öffnen, **tur, wie ein**
 so werden immer grössere Winkel dadurch, **Winkel ent-**
 aber auch zugleich und mit den Winkeln **stehen kann,**
 Eirkelbögen entstehen; welche folglich **erwiesen.**
 das Maas der Oeffnung oder ihre Grösse **Warum man**
 bestimmen. Unsere Leser wundern sich **diese Lehre**
 ja nicht, daß wir so umständlich von die- **so umständ-**
 sen Materien handeln. Es ist an den er- **lich abhandle.**
 sten Grundideen, wie in allen Wissens-
 schaften, also auch in der Mathematik,
 ungemein viel gelegen. Der Hr. von Leib-
 niz pflegte deswegen zu sagen, er seye
 ein Gegenfüßler der gemeinen Gelehrten,
 was diesen am leichtesten vorkomme, nem-
 lich die Lehre von den ersten Grundsätzen, **Warum man**
 das seye ihm am schwersten; hingegen **von der pra-**
 werde ihm hernach dasjenige desto leicht- **ctischen Aus-**
 ter, was ihnen schwer und unauflöslich **messung der**
 seye. Was nun die wirkliche Ausmes- **Winkel und**
 sung der Winkel betrifft, so geschieht sie **folglich auch**
 durch den sogenannten Transporteur; **von dem so-**
genannten
Transporteur nicht be-
sonders
wel,

handle, und welcher aber zum practischen Ausmessen wie ein Geometro nichts als den Cirkel und das Lineal nöthig habe, und das Lineal gebrauchen.

§. 141. Nunmehr können wir schon weiter gehen, und die verschiedene Verhältnisse der Winkel gegen einander betrachten. Wenn eine gerade Linie auf einer andern also aufstehet, daß sie sich auf keine Seite mehr als auf die andere

neiget, so stehet sie perpendicular, oder senkrecht; und ein Winkel, der durch zwei auf einander perpendicular stehende Linien gemacht wird, heisset ein rechter Winkel. (angulus rectus). Diejenige Winkel,

die grösser sind, als ein rechter, heissen stumpfe (obtusi), welche aber kleiner sind, heissen spitzige Winkel. (anguli acuti.) Nun kann ich auf einer jeden geraden Linie einen halben Cirkel beschreiben, wenn ich einen Punkt nach Belieben annehme, und die eine Spitze des Cirkels auf dem Punkt setze, mit der andern aber nach beliebiger Eröffnung die Cirkellinie beschreibe. Da ich aber auch aus jedem Punkt einer gegebenen Linie, andere gerade Linien ziehen kann, wodurch Winkel bestimmt wer-

den: so müssen alle auf einer Linie aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezogene Winkel zusammen einem halben Cirkel, das ist $\frac{1}{2} \text{ } ^\circ = 180^\circ$ gleich seyn: und weil sich auf einer jeden Linie

Linie eine Perpendicularlinie gedenken ne Winkel, läßt, die Perpendicularlinie aber auf beiden Seiten rechte Winkel macht, so müssen auch zwei rechte Winkel 180° gleich seyn; folglich wird ein rechter Winkel, die Hälfte von zweien, auch der Hälfte von 180° das ist 90° Graden oder dem vierten Theil des Circels gleich seyn. Diese Satz lassen sich nun auch aus den Figuren beweisen. Man heist diejenige Winkel, welche auf einer Linie aufstehen, und aus einem Punkt gezogen werden, Nebenwinkel (anguli contigui, vel deinceps positi). Demnach sind die Winkel ACD und DCB , oder m und n Nebenwinkel. Das Maas des Winkels m ist der Bogen AD , und das Maas des Winkels n der Bogen BD . §. 140. Folglich ist

$$m = AD$$

$$n = BD$$

$$m + n = AD + BD$$

$$180^\circ = AD + BD.$$

$$m + n = 180^\circ.$$

Wenn also der eine Winkel z. E. m gegeben, und 120° gleich wäre, so würde der andere leicht sich finden lassen; er wäre nemlich $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$$\text{Dann } m + n = 180^\circ$$

$$\text{nun seye } m = 120^\circ$$

$$\text{folglich } n = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

§ 4

Wenn

180° zusammen ausmaachen, oder zweien rechten Winkeln gleich seyn, und wie ein rechter Winkel allemal 90° halthe.

Was Nebenwinkel seyn

Tab. I.
fig. 5.

und wie alle Nebenwinkel zusammen 180° halten,

und wie man aus einem gegebenen Nebenwinkel den andern finden könne.

360 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

Alle Winkel um einen Punkt herum halten 360° zusammen. Wenn ferner der eine ein rechter Winkel ist, so muß es auch der andere seyn; dann wenn $m = 90$, so ist $n = 180 - 90 = 90$. Weist man endlich um einen jeden Punkt einen Circle herumschreiben kann, so werden auch alle um einen Punkt herum beschriebene Winkel einen Circle, folglich auch seinem Maas, das ist 360° gleich seyn.

Was Verticalwinkel seyen?

Tab. I.
fig. 6.

Alle Verticalwinkel sind einander gleich;

§. 142. Die Verticalwinkel machen wieder eine andere Verhältniß der Winkel aus. Sie entstehen, wenn zwey Winkel an ihren Spitzen zusammen stoßen, und die verlängerte Schenkel einander durchkreuzen. So stellet ein lateinisch X Verticalwinkel vor. Nun ist dieses die Eigenschaft der Verticalwinkel, daß sie alle einander gleich seyen. Folglich $o = x$; dann

$$\begin{array}{rcl} o + n & = & 180^\circ \quad \text{§. 141.} \\ x + n & = & 180^\circ \\ \hline o + n & = & x + n \quad \text{§. 9.} \\ n & = & n \\ \hline o & = & x. \end{array}$$

Fruchtbar: Diese zwey Lehrsätze von den Nebenwinkeln sowohl als von den Verticalwinkeln muß man sich wohl bekannte machen; dann sie kommen im folgenden ungemein oft wiederum vor. Ehe wir aber weitere Verhältnisse der Winkel unsern Lesern vortragen, müssen wir einen Begriff

griff aus der Metaphysik entlehnen, und zeigen, was eine Figur ist. Wenn ein Continuum durch ein anders Continuum seine bestimmte Grenzen allenthalben bekommt, so sagt man, es seye eine Figur. Ein Winkel ist also keine Figur im eigentlichen Verstand; es sey dann, daß die Oefnung durch eine Linie vollends geschlossen werde. Folglich wird die allereinfacheste geradelinichte Figur ein Dreyeck seyn. Dann geradelinichte Zweyecke lassen sich nicht denken. Entweder divergiren die Linien, und stoßen nur in einem Punkt zusammen, oder sie fallen in allen Punkten zusammen. Ist jenes, so gibt es Winkel; ist dieses, so bekommt man die vorige gerade Linie wieder, ohne eine Figur. Folglich ist das Dreyeck die erste geometrische Figur, die aus geraden Linien entstehen kann.

§. 143. Ein Dreyeck bestehet aus drey Seiten und drey Winkeln; man kann es also nach den Seiten und Winkeln betrachten. Was die Seiten betrifft, so können entweder alle drey Seiten einander gleich seyn, da es dann ein gleichseitiges Dreyeck gibt (Triangulum æquilaterum,) oder es können nur zwey Seiten einander gleich seyn; in welchem Fall ein gleichschenklichtes Dreyeck heraus kommt (triang. æquicrurum vel isosceles), oder es kann auch seyn, daß gar keine Seite der andern gleich ist.

das ungleichseitige, folglich das Dreyeck ungleichseitig wird
(*triangulum scalenum.*) In Absicht auf

die Winkel gibt es wiederum drey Fälle.
in Rücksicht Dann wenn in einem Dreyeck ein rech-
aber auf die ter Winkel ist, so hat man ein rechtwink-
Winkel, liches Dreyeck, (*Triang. rectangulum.*)
das recht- ist ein stumpfer darinnen befindlich, so ist
winklichte, das Dreyeck stumpfwinklicht, (*obtusangulum.*) Sind aber alle drey Winkel

das stumpf- spitzig, so ist das Dreyeck spitzwinklicht.
winklichte, (*acutangulum.*) Warum wir nicht
und das spit mehr als einen rechten, und einen stum-
zwey winklichte pfen, hingegen drey spitzige Winkel sagen
Dreyeck. dürfen, solle an seinem Ort erwiesen wer-
den. Man siehet also hieraus schon, daß

Aus drey Seiten wird man aus drey gegebenen Seiten ein Dreys-
ein Dreyeck eck machen kann; nur müssen die Seiten
bestimmt, wenn je zwey so beschaffen seyn, daß allemal zwey zus-
und zwey Sei- sammen genommen, grösser seyen als die
ten zusamen dritte. So kann man aus den drey Eis-
allemaal grösser sind als nien *AE*, *AC*, und *AB* ein Dreyeck mas-
die dritte. chen, weil $AE + AC > AB$, und $AB +$

Tab. I. $AC > AE$ u. s. w. wenn aber $AE + AC$
fig. 2. $< AB$, so wäre das Dreyeck nicht mög-
lich, und die zwey Linien *AE* und *AC* wür-
den sich nicht ausserhalb der Linie *AB*
schliessen oder zusammen gehen können,
weil sie zu kurz sind, folglich in die Linie

Tab. I. *AB* hineinfallen müßten. Eben so kann
fig. 8. man aus zwey Linien und dem Winkel,
den sie einschliessen, das Dreyeck *ABC*

Aus zwey Sei- machen; dann die Seiten *AB* und *AC* und
ten und et der

der Winkel BAC sind gegeben; folglich ist den Winkel keine andere Linie, durch welche das Dreyn: den sie einschließen, schließend, beschloffen und vollendet würde, mög: wird ein lich, als die Linie BC . Endlich kann man Dreynck be- auch ein Dreynck aus einer Linie und den stimmt; Tab. I. zween daran liegenden Winkeln, deren fig. 7. Maas zusammen aber kleiner als 180° Aus einer ist, bestimmen. Dann weil die Seite Seite und AB , und die Winkel DAB und CBA zween daran gegeben sind, so können sich die verlan: liegenden gerthe Linien AD und BC nirgend anders Winkeln als in E begegnen und schließend; wie man wird ein aus der Figur leicht ersiehet. Warum Dreynck be- man aus drey gegebenen Winkeln, wenn stimmt. Warum man sie auch alle so beschaffen sind, daß sie im nicht auch Dreynck Platz finden, doch noch kein be: sage aus drey stimmtes Dreynck machen könne, folglich Winkeln die Aufgab selbst unbestimmt sene, wol: wird ein Dreynck be- len wir an seinem Ort zeigen. Man muß stimmt also ein Dreynck zu bestimmen, drey Stü: ke, und unter diesen drey Stücken allemal eine Linie haben.

§. 144. Aus dem bisherigen ergeben Die hieraus
 sich drey wichtige und durch die ganze Ma: fließende
 thematik sich nutzbar beweisende Grundsätze wichtige Grundsätze
 je: der erste heißt: von der Cons

I. Wenn in zweyen Drehecken alle drey Drehecke, Seiten einander gleich sind, so sind die werden er- ganze Drehecke gleich und ähnlich, das klärt;
ist congruent; dann durch drey Seiten, I. Grundsatz, wenn in zwey Drehecken welche so beschaffen seyn müssen, wie wir alle drey §. 143. gezeigt haben, läßt sich nur ein Seiten ein-

ander gleich sind, einiges Dreyeck bestimmen. Man versuche es, und lasse sich von Holz oder Eisen drey Linien oder Seiten machen; man mag sie zusammen legen wie man will; so wird man eben immer einerley Dreyecke herausbringen.

II. Grundsatz, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beides in zwey Dreyecken einander gleich sind,

Tab. II.
fig. 8.

II. Wenn in zwey Dreyecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke vollkommen gleich und ähnlich, das ist congruent. Dann es ist unmöglich, daß eine grössere oder kleinere Linie als die Linie BC den Winkel BAC beschliessen könnte, wenn der Winkel selbst und die Linien AB und AC unverändert bleiben. Man darf sich nur hölzerne oder eiserne Linien und Winkel machen lassen, so wird man abermal durch einen Versuch von der Wahrheit unsers Satzes überzeugt werden.

III. Grundsatz, wenn in zwey Dreyecken eine Seite u. die zwey daz an liegende Winkel einander gleich sind,

Tab. II.
fig. 7.

III. Wann in zweyen Dreyecken eine Seite und die zweyen an der Seite liegenden Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ist congruent. Die Ursache ist leicht begreiflich. Wenn die Winkel DAB und CBA nebst der Linie AB unverändert bleiben, so ist es schlechterdings unmöglich, daß sich die verlängerte Linien AD und BC an einem andern Ort als in E vereinigen und schliessen. Man kann auch dßfalls den Versuch mit hölzernen oder eisern

eisernen Linien machen; wenn man eine augenscheinliche Probe für die Einbildungskraft haben will.

Das sind nun die drey wichtige Grundsätze, welche in der Geometrie billig die erste Stelle verdienen. Man druckt sie kürzerer auch, wie wir im vorhergehenden §. ge- zeigt haben; mit kürzern Worten folgen der massen aus: Ein Dreyeck wird durch drey Seiten, oder durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder endlich durch eine Seite und zween dabey liegende Winkel vollkommen bestimmt, also, daß es nicht möglich ist, zwey verschiedene Dreyecke aus diesen gegebenen Stücken zu machen. Wenn also eines gefunden wird, das eben diese Eigenschaften hätte, so ist es mit dem andern congruent, und man darf in Absicht auf die Gleichheit und Aehnlichkeit eines für das andere setzen und substituiren. Wie ferne man bey rechtwinklichten, und in der Trigonometrie, bey allen Dreyecken überhaupt sagen könne, ein Dreyeck werde durch zwey Seiten und einen Winkel, er mag stehen wo er will, bestimmt, solle an seinem Ort vorgetragen werden. In zwischen behält man nur die bereits erwiesene drey Grundsätze, durch welche man nun leicht verschiedene geometrische höchst wichtige Lehrsätze demonstriren kann. Die leichte Folgen, welche aber nicht

Kürzerer

Ausdruck des

angeführten

Grundsätze.

Warum man

nicht hier

überhaupt

sage, drey

Seiten, oder

zwey Seiten

und ein Win-

kel, oder eine

Seite und

zwey Winkel

bestimmen

ein Dreyeck.

einz

366. Geom. I. Cap. Von der dreyfachen

Warum wir die hieraus folgende praktische Aufgaben, die Breite der Dertter zu messen, u. s. f. übersehen,

und warum man auch im folgenden nichts von dem sogenannten Meßstischlein gedenken werde.

einmal in der ausübenden Mathematik mehr genutzt werden, übergehen wir ganz. 3. E. die Breite zweyer Dertter, zu deren beeden, oder einem, oder gar keinem man kommen kann, auszumessen. Man beschließt nemlich in diesem Fall, durch allershand angenommene Stände lauter congruente Dreyecke zu machen, da dann allemal die der gesuchten Breite correspondirende Seite die Breite selbst anzeigen wird. Allein diese Aufgaben lassen sich alle kürzer, zuverlässiger und vollständiger in der Trigonometrie auflösen, wohin wir auch unsere Leser im folgenden, wann von den sogenannten Meßstischlein die Rede seyn sollte, verweisen werden. Daß endlich nach den gegebenen Grundsätzen ein gleichseitiges Dreyeck, wenn nur eine einige Linie gegeben ist, und ein gleichschenklichter, wenn zwei Linien, nemlich eine Seite oder ein Schenkel und die Grundlinie gegeben sind, wirklich bestimmt werde, ist ohne unser Erinnern klar und deutlich; daher wir auch dißfalls unsern Lesern mit solchen leichten Aufgaben nicht beschwerlich fallen wollen.

Von Bestimmung und Aufrichtung der Perpendicularen.

§. 145. Es gibt aber noch einige andere Folgen, welche aus diesen Grundsätzen demonstrirt werden, und noch besonders anzumerken sind. Die erste ist die Kunst, eine Perpendicularlinie aufzurichten. Das kann nun, auf eine zweyfache Weise

Weise geschehen; dann es kann einem
 auf einer Linie ein Punkt angewiesen wer-
 den, auf welchem der Perpendikel stehen
 soll; man kann einem aber auch einen
 Punkt ausser der Linie bestimmen, von
 welchem man den Perpendikel auf die Li-
 nie herabziehen muß; vom ersten Fall re-
 den wir zuerst; man solle auf die Linie AB
 aus dem Punkt C einen Perpendikel CD auf-
 richten. Diß geschieht leicht, wenn man
 nur aus C mit beliebiger Eröffnung des
 Kreises auf der Linie AB zu beiden Sei-
 ten des Punktes C , die von dem Punkt
 C gleich weit abstehende Durchschnitte
 in A und B , hernach abermal von B
 aus in D und von A aus wieder in D
 den Durchschnitt D mit dem nach Belie-
 ben eröffneten Zirkel macht, aber so, daß
 die Öffnung, wenn sie einmal angenom-
 men ist, nicht geändert, folglich die Li-
 nien AD und BD gleich lang gezogen
 werden können. Hat man diß gethan,
 so ziehet man die gerade Linie DC , wel-
 che durch die zwei Punkte D und C be-
 stimmt wird; und eine wirkliche Perpen-
 dicularlinie ist. Dann wenn die Winkel
 α und ν zweien rechte Winkel sind, so ist
 sie gewiß perpendicular. Das erste wol-
 len wir nun erweisen:

Tab. I.
 fig. 9.

Erster Fall,
 wenn in der
 Linie ein
 Punkt gege-
 ben, aus wel-
 chem der Per-
 pendikel auf-
 gerichtet
 wird.

AC

$AC=CB$; dann man hat beide Linien gleich gemacht; eben so ist auch $AD=BD$.

$CD=CD$ und endlich die dritte Linie sich selbst gleich:

$\triangle ADC \cong \triangle BDC$; folglich kraft des ersten Grundsatzes, nr. I.

Sind aber die ganze Triangel congruent oder gleich und ähnlich, so sind auch die Winkel, die gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich; dann wenn der eine grösser oder kleiner wäre, als der andere, so würden die Figuren selbst einander nicht decken, oder congruiren. Nun steht der Seiten AD der Winkel n , und der Seiten BD der Winkel o entgegen. Folglich müssen die Winkel selbst, weil die Seiten gleich sind, auch einander gleich seyn; also ist $o=n$; ist aber dieses, so sind beide Winkel rechte Winkel §. 141. Denn $o+n=180^\circ$ §. 141.

$$o=n$$

$$o+o=180 \text{ das ist,}$$

$$2o=180^\circ$$

$$\text{---} : 2$$

$$o = \frac{180}{2} = 90^\circ.$$

Wo aber ein rechter Winkel ist, da steht allemal eine Linie auf der andern perpendicular; wir haben also bewiesen, was wir beweisen sollten. Uebrigens merken wir noch an, daß man wohl thut, wenn man

man sich Mühe gibt, die Nebenart, ein Winkel steht einer Seite, oder eine Seite steht einem Winkel gegen über, genau zu verstehen und sich bekannt zu machen; sie kommt nicht nur hier, sondern auch bey der Aehnlichkeit der Dreiecke mehrmalen vor. Am leichtesten wird man die Sache behalten, wenn man sagt: diejenige Seite, welche den Winkel beschließt, steht im Dreieck dem Winkel gegen über. So beschließt die Linie AD den Winkel α , folglich steht sie ihm gegen über, eben so steht die Linie BD dem Winkel γ gegen über, weil sie ihn beschließt, und die Oeffnung gleichsam zumacht. Der andere Fall von Perpendicularen ist, wenn einem der Punkt ausser der Linie gegeben wird. 3. E. man solle von dem Punkt D einen Perpendikel auf AB herab fallen. Hier macht man nun Durchschnitte von D aus in A und B , daß DA und DB gleich werden; ferner werden aus A und B abermal Durchschnitte entweder niederwärts in F , oder oberhalb in E gemacht; da dann durch die zwey Punkte D und E , oder D und F die Linie DC bestimmt, und zugleich eine Perpendicularinie wird. Dann

Die Nebenart, eine Seite steht einem Winkel, und ein Winkel steht einer Seite gegen über, wird erklärt, und ist besonders zu merken.

Tab. I.
Fig. 11.

Tab. I.
Fig. 10.

Zweiter Fall von Errichtung der Perpendicularen, wenn der Punkt ausser der Linie in einer gewissen Entfernung gegeben wird.

 Da
 AD

270 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

$$AD = DB$$

$$AF = FB$$

$$DF = DF$$

$$\triangle DAF = \triangle DBF \text{ folglich}$$

$o = x$ dann sie sind gleichen
Seiten AF und FB entgegen
gesetzt;

nun ist ferner $AD = DB$

$$DC = DC$$

$o = x$ folglich nach dem
zweiten Grundsatz
§. 144. nr. II.

$\triangle ADC = \triangle BDC$. Dahero auch
weil sie gleichen
Seiten AD und DB
entgegen stehen.

$$n + m = 180^\circ$$

$$n = m$$

$$2n = 180^\circ$$

$n = 90^\circ$. also ein rechter Winkel;

Eben so wird der Beweis geführt, wenn
man an dem Durchschnitt in E betrachtet;
dann $AD = DB$

$$AE = EB$$

$$DE = DE$$

$$\triangle ADE = \triangle BDE \text{ folglich}$$

$$o = x$$

ferner $AD = DB$

$$DC = DC$$

$o = x$ folglich

$$\triangle ADC = \triangle BDC.$$

$$m = n, \text{ u. s. w.}$$

Die

Die zweite Folge aus unsern Grundsätzen ist die Kunst, eine Linie und einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen; dann auch bey der bereits erklärten Figur darf man nur Durchschnitte in D und F machen, und die Linie DF ziehen, so wird in C die Linie AB in zweyen gleichen Theilen getheilet seyn. Wir haben ja umständlich bewiesen, daß unter der vorgetragenen Bedingung das Dreyeck ADC dem Dreyeck DCB gleich und congruent werde; Es ist also

$$\triangle ADC = \triangle BDC$$

$$o = x$$

folglich auch die gleichen Winkel im Winkeln entgegen stehen, de Seiten, .

$$AC = CB.$$

wie auch oben jeden Theile zu theilen.

Der Winkel wird getheilt, wenn man CA gleich macht CB , und hernach Durchschnitte aus B und A in D macht; da dann die Linie CD den Winkel ACB in zweyen gleichen Winkel o und x theilet; dann

$$CA = CB$$

$$AD = BD$$

$$CD = CD$$

$$\triangle ACD = \triangle BCD \text{ folglich}$$

$o = x$, dann sie stehen gleichen Seiten AD u. BD entgegen.

Die dritte Folge besteht endlich darinnen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyeckes einander gleich seyen. Man theile die Grundlinie AB in

Ha a

zwey

und endlich, zwey gleiche Theile, in D , und ziehe die Li-
 nee ED ; so ist
 Winkel an $AD = DB$
 der Grundli- $DE = DE$
 nie eines $AE = EB$, weil das Dreyeck gleich-
 gleichschen- $\triangle AED = \triangle BED$; und daher die einerley
 kichten Drey- $\angle o = n$. Seiten entgegen stehende
 ecke gleich Winkeln einander gleich.
 seyen.

Eben so könnte man umgekehrt beweisen,
 wenn die Winkel in der Grundlinie gleich
 sind, so seyen die Dreyecke gleichschen-
 klicht. Das sind nun die vornehmste Fol-
 gen aus den obigen Grundsätzen, unter
 welchen man vornehmlich die dritte und
 letzte behalten und sich bekannt machen
 kann.

Tab. I.
 Fig. 13.
 β.

Wir setzen noch folgenden Lehrsatz
 bey, der ebenfalls wohl zu merken ist. In
 einem jeden geradelinichten Dreyeck sind
 allemal zweyen Winkel zusammen kleiner
 als 180° oder als zweyen rechte Winkel.
 Man betrachte das Dreyeck ABC , und
 theile die Seite AC in zweyen gleiche Theile
 in E ; man ziehe die Linie BE , und ver-
 längere sie nach F , bis $EF = BE$. Man
 ziehe die Puncten F und C zusammen, so
 bekommt man das Dreyeck $EFC = \triangle ABE$,
 weil nach der Construction $AE = EC$,
 $EB = EF$, und die Verticalwinkel bey E
 einander gleich sind. Man bezeichne die
 Winkel s, o, n, m , so ist der Beweis des
 Lehrsatzes leicht zu finden. Denn weil
 $\triangle ABE = \triangle EFC$; so ist

$$s = n$$

$$\begin{array}{r}
 s = n \text{ aber} \\
 n < n + m \text{ also auch} \\
 \hline
 s < n + m \\
 o = o \\
 \hline
 s + o < o + n + m \\
 = 780^\circ \\
 \hline
 s + o < 180^\circ.
 \end{array}$$

§. 146. Jetzt aber kommen wir auf einen höchst wichtigen Lehrsatz von den sogenannten Parallellinien, in so ferne sie durch eine dritte Linie durchschnitten werden. Wir müssen nur vorher erklären, was Parallellinien seyen. Zwei Linien, welche auf einer dritten perpendicular aufstehen, sind einander parallel; folglich wird sich nach der Natur der Perpendicularen keine zur andern neigen, noch auch von ihr sich entfernen. Dahero hat Euclides diejenige Linien parallel genannt, welche weder convergiren noch divergiren; und Herr Baron von Wolf solche Linien, welche immer einerley Weite oder Distanz von einander behalten. Dann die Weite oder die Distanz zweyer Parallellinien ist, wie man leicht begreift, allemal eine Perpendicularlinie, oder eine Linie, mit welcher die Parallellinien beiderseits rechte Winkel machen. So sind die Linien *HD* und *IK* parallel. Wenn nun diese zwei Linien durch eine dritte Linie *DE* durchschnitten werden, so sind die

A a 3

Weite

Was Wechselwinkel
seyn;

Alle Wechselwinkel,
(anguli alterni) sind
einander
gleich.

Beweis die-
ses wichtigen
Lehrsatzes.

Wechselwinkel (anguli alterni) x und y einander gleich. Diesen wichtigen Lehrsatz wollen wir jezo beweisen. Man ziehe zwischen zwei gegebenen Parallellinien HD und AK die Perpendicularlinie AB , welche die Distanz beeder Linien ausdrückt, folglich auf einer wie auf der andern perpendicular stehen muß, §. 144. Man theile diese Linie in zween gleiche Theile in C ; nach §. 145. hernach ziehe man durch den Theilungspunkt C die schiefe Linie ED , wie man will, wenn nur die Parallellinien dadurch beiderseits durchschnitten werden; durch diese Operation werden zwey Dreyecke ECB und ACD erzeugt. Wenn sie nun beede congruent, das ist gleich und ähnlich sind, so werden die Winkel x und y einander gleich seyn. Das wollen wir jezo beweisen.

I. Wir sagen erstlich:

$$r = s$$

Dann AB ist die Distanz der Parallellinien;

$$n = 0 \quad \S. 142.$$

$$AC = CB.$$

Dann wir haben sie gleich gemacht; folglich

$$\triangle ACD = \triangle BCE.$$

Darum sind auch die gleichen Seiten entgegenstehende Winkel einander gleich, das ist, weil x der Linie AC , und y der Linie CB entgegen steht.

$$AC = CB.$$

$$x = y.$$

Das

Das ist das erste, das wir beweisen wollen; es fließen aber noch mehr Folgen aus dieser Lehre.

II. Dann weil

$$x = y \quad \text{nr. I.}$$

und $x = u$ §. 142. so ist auch §. 9.

$$u = y.$$

III. Endlich weil

$$u = y \quad \text{nr. II.}$$

und $m = m$ so ist auch,

$$u + m = y + m \quad \text{da aber}$$

$$u + m = 180^\circ \quad \text{so ist §. 9.}$$

$$y + m = 180^\circ.$$

Also sind nach dem gegebenen Beweis I. die Wechselwinkel x und y einander gleich;

II. Der Verticalwinkel von x , nemlich der Winkel u , ist gleichfalls dem untern Winkel y gleich;

III. Die Summe der zweien innern Winkel $m + y$ ist jedesmal 180° .

Wie nun diese Eigenschaften aus dem angenommenen Satz, daß die Linien HD und IK parallel seyen, unumstößlich bewiesen seyn können, so kann man auch wieder ohne Mühe umgekehrt beweisen, daß zwei Linien parallel seyen, wenn die Wechselwinkel x und y einander gleich seyen. u. s. w. gleich sind. Dieser Lehrsatz ist einer der fruchtbarsten in der Geometrie, man thut daher wohl, wenn man ihn

Zwei gleich wichtige Folgen, die aus dem erwiesenen Lehrsatz sich herleiten lassen.

wenn man sich selbigen vorzüglich bekant macht. Seine Fruchtbarkeit werden wir sogleich im folgenden zeigen. In meinem mathematischen Lehrbuch habe ich den Euclidischen Beweis mit den Kästnerischen Erläuterungen vorgetragen; wo man denselben nachschlagen kann. Der hier gegebene aber ist für Anfänger etwas leichter.

§. 147. Ein jedes Dreyeck hat drey Winkel; die Summe dieser Winkel wird sich also ausmessen lassen. Daran zweifelt man nicht. Das aber könnte man

von den drey Winkeln im Dreyeck; und ob die Anzahl der Grade in allen drey Winkeln zusammen genommen bey allen Dreyecken gleich groß und unterschieden seye; dabey noch fragen, ob alle Winkel im Dreyecke zusammen genommen, eine gleiche Anzahl von Graden haben, oder nicht; die Dreyecke selbst mögen hernach gleichseitig, gleichschenkligt, ungleichseitig, recht, stumpf, oder spizwinkligt seyn? Und wenn das erste wäre, so könnte man wieder fragen, ob sich die Anzahl der Grade der Winkel für alle nur denkbare geradenlinichte Dreyecke nicht auch bestimmen lasse. Wir wollen es versuchen, ob wir eine bestimmte Antwort hierauf geben können.

Tab. I.
Fig. 13.

Die drey Winkel eines geradenlinichten Dreyecks zusammen genommen sind 3. E. das Dreyeck ACB , dessen Grundlinie (basis) AB ist; mit dieser Grundlinie ziehe man durch den obern Spiz C die Linie DE parallel, und bezeichne hernach alle theils schon vorhandene, theils durch die Paral-

Parallellinie neuentstandene Winkel mit allemal 180° den kleinern Buchstaben des Alphabets, oder zween rechten Winkel gleich.
 p. E. m, n, o, r, s. Ist dieses geschehen, so wird man folgende Gleichungen finden:

$$r = m \quad \S. 146. \text{ nr. I.}$$

$$o = o \quad \S. 9.$$

$$s = n \quad \S. 146. \text{ nr. I. folglich } \S. 9. \text{ Beweis des Lehrsatzes.}$$

$$r + o + s = m + o + n \quad \text{ferner ist}$$

$$r + o + s = 180^\circ \quad \S. 141. \text{ Demnach } \S. 9.$$

$m + o + n = 180^\circ$. Da nun $m + o + n$ die drey Winkel in dem vorgegebenen Dreyecke sind, so macht ihre Summe zusammen 180 Grade; und weil der Beweis bey allen geradelinichten Dreyecken angehet, so wird die Summe aller Winkel in einem solchen Dreyeck, es mag beschaffen seyn wie es will, wenn es nur geradelinicht ist, allemal 180° machen. Wir reden nur von geradelinichten Dreyecken; dann es gibt auch krummlinichte; und von diesen werden wir zu seiner Zeit hören, daß sie ungleich mehr Grade in ihren Winkeln haben können. Uebrigens erhellet hieraus, daß kein geradelinichtes Dreyeck mehr als einen rechten Winkel habe; dann zwey rechte Winkel machen schon 180° ; folglich würde für den dritten Winkel nichts mehr übrig bleiben. Noch viel weniger kann ein Dreyeck mehr als einen stumpfen Winkel haben; sonst würde die Anzahl nun von 2 Winkeln schon grösser

als 180° seyn; hingegen drey spitzige sind in einem Dreyeck möglich; und wenn sie alle einander gleich sind, so ist ein jeder $\frac{180}{3} = 60^\circ$; folglich hält der Winkel in dem gleichseitigen Dreyeck 60° ; weil sie alle drey gleich sind, das ist, weil die Winkel, die gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich seyn. Man kann dieses letzte auch aus §. 145. eben so beweisen, wie man die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks bewiesen hat. Aus dem gegebenen Beweis für die geradelinichte Dreyecke fließt noch eine wichtige Folge. Man verlängere die Seiten eines Dreyecks z. E. im Dreyeck ACB die Seite AC bis in D , so wird ein neuer Winkel DCB oder mit dem kürzern Ausdruck der Winkel p erzeugt werden. Und dieser Winkel p , welcher der äussere Winkel heisst, (angulus externus) wird den beiden entgegen gesetzten innern Winkeln, (angulis oppositis internis) gleich seyn. Der Beweis ist leicht, und heisst also:

Tab. I.
Fig. 14.

Der äussere Winkel in einem Dreyeck ist den entgegen gesetzten beiden innern Winkeln gleich.

Beweis:

$$o + m + n = 180^\circ$$

$$o + p = 180$$

$$o + m + n = o + p.$$

$$o = o$$

$$m + n = p.$$

Nach dem ersten Beweis.

§. 141. folglich

Da nun

so wird, wenn man beiderseitig subtrahirt,

Das

Das heißt, der äussere Winkel p ist allemal den beiden innern entgegen gesetzten Winkeln eines Dreyecks gleich.

§. 148. Waren die bisherige Lehr-
sätze von den Dreyecken so fruchtbar als
wichtig, so wird man im folgenden nicht
weniger solche Sätze lesen, deren Nutzbar-
keit sich in der ganzen Mathematik aus-
breitet. Die Lehre von den Winkeln ist
noch nicht erschöpft. Wir haben §. 140.
gezeigt, daß man einen Winkel durch ei-
nen Cirkelbogen, dessen Mittelpunkt die
Spitze, und dessen Radii die beide Schen-
kel des Winkels sind, messen könne. Wie
wäre es nun, wenn man den Bogen voll-
endete, und um den Winkel herum einen
Cirkel beschriebe, und hernach andere Win-
kel in den Cirkel unter der Bedingung hin-
einsetzte, daß ihre Spitze an die Periphe-
rie hinreichte, die Schenkel aber auf eben
dem vorigen Cirkelbogen, welcher das
Maas des ersten Winkels war, aufstün-
den? Wir wollen einen Versuch machen.
Man siehet von selbst, daß es verschiedene
Fälle gebe. Der erste und leichteste wird
in der sechszechenden geometrischen Figur
vorgestellt. Man hat um den Winkel BCA
aus dem Punkt C den Cirkel $BADB$ be-
schrieben; folglich ist der Bogen BA das
Maas des Winkels BCA , oder nach einem
kürzern Ausdruck des Winkels o ; Die
Linie AC wurde bis an die Peripherie in

Die Betrachtung der Winkel nach ihren verschiedenen Lagen wird fortgesetzt.

Tab. I.
fig. 16.

Was die Winkel am Mittelpunkt (anguli ad centrum) und die Winkel an der Peripherie,

D

(anguli ad
peripheriam)
liegen.

D verlängert, und sodann von D bis B die Linie DB gezogen; da sich dann ein neuer Winkel BDA ergabe, welcher auf dem vorigen Bogen aufstehet, und dessen Spitze sich gerade in der Peripherie endiget. Man heisset ihn deswegen einen Winkel an der Peripherie (angulus ad peripheriam) wie der erstere ein Winkel am Mittelpunkte (angulus ad centrum) genannt

Der Winkel wird. Nun hat man gefunden, daß der am Mittelpunkte ist noch einmal so groß seye, als der Winkel an der Peripherie, der auf eben demselbigen Bogen steht. Wir wollen sehen, ob wir diesen Satz auch aus den vorgezeichneten Figuren erfinden können. Der kurz ausgedruckte Satz wird demnach der folgende seyn: $a = 2x$

Nun müssen wir den Beweis davon geben:

$a = x + y$ §. 147. denn a kann als der äußere Winkel angesehen werden.

$x = y$ §. 145. denn der $\triangle CDB$ ist gleichschenkllich, weil DC und CB Radii sind. Wenn man nun gleiches für gleiches setzt, so ist

$a = x + x = 2x$; welches zu erwiesen war.

Und das ist nun der

I. Fall, da $a = 2x$.

Man

Man kann aber auch den Winkel an der zweyten Fall-Peripherie also zeichnen, wie er in der Tab. I. 17 Fig. aussiehet; da dann abermal ge- Fig. 17.
fragt wird, ob der Beweis auch auf diese Zeichnung angewendet werden könne. Wir wollen sehen, ob wir die Zeichnung nicht auf den ersten Fall reduciren können, damit der Beweis bekannter und leichter werde. Man ziehe von der Spitze D durch den Mittelpunkt C die Linie DE , so wird wird man die 16 Fig. gleichsam doppelt neben einander gesetzt finden, und alles dahin reduciren können. Dann der Winkel ACB ist in zween Winkel o und n getheilt, deren Summe dem vorigen Winkel gleich seyn muß, weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist. Folglich heißt der Winkel ACB nunmehr $o + n$, und der Winkel in der Peripherie, nemlich ADB wird aus gleichem Grunde heißen $y + x$. Wenn nun $o + n = 2y + 2x$, so haben wir die obige Eigenschaft auch von dieser Bezeichnung erwiesen. Der Beweis ist leicht:

$$\begin{array}{ll} o = 2y & \text{nach nr. I.} \\ n = 2x & \text{aus gleichem Grunde;} \\ \hline & \text{folglich} \end{array}$$

$$o + n = 2y + 2x. \quad \text{welches der}$$

II. Fall war, den wir nun bewiesen haben.

End.

Dritter Fall; Endlich kann auch die Zeichnung so
 Tab. I. aussehen, wie sie in der 18. Fig. anger-
 Fig. 18. bracht ist. Da man dann abermal fragt,
 ob auch hier $0 = 25$; Wir versuchen eine
 nochmalige Reduction auf den ersten Fall,
 und ziehen aus der Spitze D durch den
 Mittelpunkt C die Linie DF ; durch wel-
 che wir zween neue Winkel, nemlich n
 und r , und zugleich eine der ersten Zeich-
 nung ähnliche Figur bekommen. Nun
 wird der Beweis sich bald geben. Dann
 der Winkel FCB ist gleich $n + 0 = 2r$
 $+ 25$, wie wir erwiesen haben; wann
 man nun gleiches von gleichem subtrahirt,
 so bleibt gleiches übrig, nemlich $0 = 25$;
 oder in wirklichen Gleichungen:

$$n + 0 = 2r + 25$$

$n = 2r$. Wie nr. I. erwiesen ist;
 wird nun dieses subtrahirt,
 so ist,

$$0 = 25. \quad \text{welches der}$$

III. Fall war, den wir erweisen sollten.

Wie die All-
 gemeinheit
 des obigen
 Lehrsatzes
 aus den drey
 Fällen be-
 stimmt wer-
 de.

Nun kann man keine weitere Zeichnung
 ausdenken, welche nicht mit einem
 von diesen drey angeführten Fällen übere-
 inkommen; demnach wird der allgemeine
 Lehrsatz seine Richtigkeit haben, daß alle
 Winkel am Mittelpunkt noch einmal so
 groß seyen, als die Winkel an der Peris-
 pherie, oder daß der Winkel an der Per-
 ipherie allemal die Helfte seye von dem

Winkel

Winkel am Mittelpunkt, der mit ihm auf einerley Bogen steht.

§. 149. Aus den erwiesenen Lehrsätzen lassen sich nun wiederum verschiedene wichtige Folgen herleiten. Dann wann man das gesagte kürzlich wiederholt, und die Zeichnung noch einmal betrachtet, so wird man bald die erste Folge verstehen, welche diese ist: Alle Winkel an der Peripherie eines Cirkels sind einander gleich, wenn sie auf gleichen Bögen stehen. So ist der Winkel $ANB = AMB = ADB$, dann ihr gemeinschaftliches Maas ist der halbe Bogen AB , auf dem sie aufstehen; oder ein jeder ist die Helfte von dem Winkel am Mittelpunkt, den man im Sinne bey der Figur hinzudenken kann, und dessen Maas der Bogen AB ist. Darum ist $\frac{1}{2}AB$ das Maas der Winkel ANB , AMB u. s. w. diejenigen Winkel aber, die einerley Maas haben, sind einander gleich. Also sind alle Winkel an der Peripherie, wenn sie auf einerley Bogen stehen, einander gleich.

Die zweite Folge ist von gleich grossem ja noch grösserem Gewichte. Sie heisst also: Ein Winkel an der Peripherie auf einem halben Cirkel, oder auf einem Bogen von 180° aufstehet, hat zu seinem Maas die Helfte des Bogens, darauf er steht, das ist, 90° ; folglich ist er ein rechter Winkel. Folglich sind alle Winkel, die sich in der Peripherie endigen, und auf

Einige Fol-
gen werden
aus dem er-
wiesenen
Lehrsatz bew-
geleitet,
Erste Folge,
alle Winkel
an der Per-
Tab. I.
Fig. 20.

pherie, wenn
sie auf glei-
chen Bögen
stehen, sind
einander
gleich.

Zweite
höchst wichti-
ge Folge, ein
Winkel an
der Peripherie
Tab. I.
Fig. 21.

rie, der auf
einem halben
Cirkel auf-
steht, oder auf
dem dem Dames

ter beschrie- dem halben Cirkel oder auf dem Diaman- ben wird, ist ter stehen, rechte Winkel. Dieser lehrt allemal ein rechte Winkel, sag fließet unmittelbar aus dem vorherge- kel und hält henden, und breitet seinen Nutzen durch 90 Grade. die ganze Geometrie aus. Die Winkel AEB , ADB u. s. w. sind also rechte Winkel; dann

$$\angle AEB = \frac{\angle ANB}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\angle ADB = \frac{\angle ANB}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$$

Die Aufgabe, Wenn man also einem die Frage aufgibt, man solle auf den Diameter eines Cirkels ein rechtwinkliches Dreyeck aufrichten konn- ne, so ist die Frage unbestimmt; dannes Dreyeck, das lassen sich unendlich viele darinnen beschreiben; dahero sagt man, der Cirkel seye der geometrische Ort für die rechte Winkel, ist daher eine unbestimmte Aufgabe, des Cirkels. Eben so ist ohne unser Erinnern klar, daß man mit leichter Mühe gleichen un- eine Menge von Perpendicularitäten er- endlich viel finden könne, wenn man auf dem Diameter des Cirkels solche Dreyecke aufrichtet, oder die Linien AE und EB , AD und DB u. s. w. ziehet.

Wie man eine Menge Perpendicularitäten nicht auch einen Winkel, dessen Spitze über die Peripherie hinaus reicht, einzudeuten, und an ger massen bestimmen und schicklicher ausdrucks

drücken. könne? Man beschreibe den Winkel AFB , dessen Spitze, so weit man will, über die Peripherie des Circels hin, aus reichen, die Schenkel aber auf dem Bogen AB aufstehen sollen. Man ziehe sodann die Linie AD , so wird man neue Winkel α und γ bekommen. wird sich eine Rechnung ergeben, man sagt:

Tab. I.

Fig. 19.

Letzte Folge,

ob u. wie man

den Winkel,

dessen Spitze

über die Peris

pherie hin

ausreicht,

bestimmen

können.

$$\alpha = \frac{AB}{2} \quad \S. 148.$$

$$\gamma = x + y \quad \S. 147.$$

$$x + y = \frac{AB}{2}$$

$$y = \frac{ED}{2} \quad \S. 148. \text{ subtrahirt:}$$

$$x = \frac{AB - ED}{2}$$

oder wenn man gleiches

$$x = \frac{\alpha - \gamma}{2} \quad \text{für gleiches setzt,}$$

Demnach ist der Winkel AFB , oder kürzer, der Winkel x die halbe Differenz zwischen den Winkeln α und γ ; das ist, wenn man ED das Maas des Winkels γ von AB dem Maas des Winkels α subtrahirt, und den Rest halbirt, so hat man das Maas des Winkels x , welcher über die Peripherie hinaus reicht.

§. 150. Bisher haben wir die Winkel im Circel ohne Sehnen betrachtet, nun wollen wir auch sehen, was wir für Eigenschaften finden, wenn wir die Schenkel der Winkel über die Peripherie hinaus reichen lassen.

Ob

Wink

Winkel nicht nur durch Bögen, sondern auch durch die Sehnen der Bögen beschließen. Es seye der Cirkel $ADEB$ gegeben; sein Mittelpunkt seye C ; in C wollen wir den Winkel ACB oder n sich endigen lassen, und seine Schenkel AC und CB mit der Sehne AB schließen; Nun wollen wir auf einer andern beliebigen Seite des Cirkels einen gleich grossen Bogen DE abschneiden, und auch seine Sehne ziehen, sodann selbige durch die Radios DC und

Wenn die EC mit dem Mittelpunkt verbinden; Nun fragt man, ob die Sehnen gleich seyen, wenn die Bögen gleich sind. Wir sagen gleich sind, so ja, und wollen unsere Antwort jezo beibringen auch die weisen.

Sehnen Der Bogen $DE =$ dem Bogen AB folglich gleich,

$$n = n$$

§. 147. ferner

$$DC = CA$$

$$EC = CB$$

dann es sind lauter Radii;

dennach, §. 144.

$$\triangle DCE = \triangle ACB$$

und daher auch

$DE = AB$; weil diese zwei Seiten gleichen Winkeln entgegen stehen.

und wenn die Hieraus erhellet, daß die Sehnen gleicher Bögen einander gleich seyen; und eben so leicht sich beweisen, daß die Bögen gleich seyn müssen, wenn die Sehnen gleich sind. Dann wenn

DE

$$DE = AB$$

$$DC = CA$$

$$EG = CB$$

so ist

$$\triangle DCE = \triangle ACB.$$

Folglich

$$o = n$$

und daher auch

der Bogen $DE =$ dem Bogen AB .

welche durch
die Bogen ge-
messen wer-
den.

§. 151. Wir halten uns nur noch et- Ob die Per-
ne kurze Zeit bey den Sehnen auf, und pendicularlin-
versuchen jeko, was heraus kommt, wenn ne Sehne in
wir eine Sehne ziehen, und selbige durch zween gleiche
eine Perpendicularlinie in zween gleiche Theile zhei-
Theile zertheilen; wird wohl die Perpen- Mittelpunkt
dicularlinie, wenn sie verlängert wird, des Cirkels
durch den Mittelpunkt des Cirkels gehen, ganzen Cirkel
und folglich den Cirkel selbst in zween glei- in 2 gleiche
che Theile schneiden? Es sey die Sehne Theile theile-
 AB , die Perpendicularlinie, welche die längert wird
Sehne in G in zween gleiche Theile thei-
let, DG ; nun verlängere man sie bis in Tab. II.
 F ; und ziehe zu beeden Seiten die Seh- Fig. 23.
nen DA, AE, DB und BE . Wenn $DA =$
 DB und $AE = BE$, so sind auch die Bo- Verabhang
gen DA und DB , ferner die Bogen AE
und BE einander gleich; folglich geht die dieser Frage
verlängerte Linie DE durch den Mittelpunkt, samt dem
Das erstere wollen wir beweisen; da sich Beweis;
dann das letztere von selbst geben wird.

$AG = GB$, weil die Linie in 2. gleiche Theil

$$GD = GD$$

getheilt wird.

$\angle AGD = \angle DGB$; sind rechte Winkel; folglich

$$\triangle AGD = \triangle DGB$$

und daher auch

$$AD = BD,$$

weil sie gleichen Winkeln ent-
gegen stehen,

Ob a

herv

Ferner

$$AG = GB$$

$$GE = GE$$

$$AGE = BGE \text{ sind rechte Winkel, folglich}$$

$$\triangle AGE = \triangle BGE; \text{dahero auch}$$

$$AE = BE, \text{ weil sie gleichen Seiten ent-} \\ \text{gegen stehen;}$$

Wir haben also bewiesen, daß

$$AD = DB$$

$$AE = BE, \text{ folglich §. 9.}$$

$$AD + AE = DB + BE \text{ also auch die Bögen}$$

$$DAE = DBE. \quad \text{§. 150. Da nun}$$

$$DAE + DBE = \text{der ganzen Peripherie} \\ = 360^\circ.$$

und $DAE = DBE$ so wird, wenn gleiches für
gleiches gesetzt wird,

$$2DAE = 360^\circ$$

$$\text{-----} : 2$$

$$DAE = 180^\circ \text{ oder dem halben Cirkel.}$$

Eben so ist auch DBE der halbe Cirkel; folglich theilet die Linie DE den ganzen Cirkel in zween gleiche Theile; ist aber dieses, so ist sie der Diameter, und geht durch den Mittelpunkt. Wenn man nun an zween Orten, solche Sehnen, z. E. AB und BE ziehet, und sie in zween gleiche Theile durch Perpendicularlinien theilet, so werden sie beide, nemlich GH und IK , durch den Mittelpunkt gehen, und folglich, weil der Cirkel nur einen einzigen Mittelpunkt hat, an dem Ort, wo sie einander durchschneiden, nemlich in C ihn bestimmen. Man siehet hieraus, daß man aus drey

Tab. II.

fig. 24.

und wie da-
durch, wenn
man die Ope-
ration mit
zwo verschie-
denen Seh-
nen mache,
der Mittels-
punkt des

gegebenen Punkten, wenn sie anders Eirkels be-
nicht in einer geraden Linie liegen, einen stimmt und
Eirkel bestimmen kann; dann die Punkte gefunden
seyen A , B , und E , nun ziehe man die werde,
Linien AB und BE , und theile sie durch auch wie man
Durchschnitte in G und E , wie auch in aus drey gege-
 I und K , welche schon die Perpendicular: benen Punk-
linie S . 145. bestimmen, in zween gleiche theil, wenn sie
Theile, so werden die gezogene Linien GH geraden Linie
und IK , den Mittelpunkt C , und die aus Eirkel bestim-
dem Mittelpunkt C nach A einem der gege: men könne?
benen Punkte gezogene Linie CA oder den
Radius bestimmen; wenn man aber den
Mittelpunkt und den Radius hat, so hat
man den ganzen Eirkel, dessen Peripherie
hernach durch die drey Punkte A , B und
 E gehen wird.

§. 152. Doch genug von diesem; wir Von den
handeln jezo eine wichtige Materie ab, Vierecken;
in Rücksicht auf die Vierecke. Man fragt
billig, ob man nicht wie bey den Drey: ob man nicht,
ecken, also auch bey den Vierecken, oder wie im Drey-
bey solchen Figuren, die in vier gerade Li: im Viereck,
nien eingeschlossen seyen, die Anzahl die Anzahl als
der Winkel bestimmen könne. Bey dem bestimmen
Dreieck machen sie 180° , wie viel machen könne,
sie wohl zusammen bey dem Viereck aus?

Wir werden diese Frage durch die Redu: und wie man
tion beantworten können, wenn wir nur zu dem Ende
wissen, was Diagonallinien seyen. Wenn wissen müsse,
in einem Viereck oder überhaupt in einem was Diago-
Viereck von einem Eck zum andern eine nallinien
seyn.

Bb 3

Linie

Tab. II.
fig. 25.
26.

die Summe
aller Winkel
im Viereck ist
 360° .

Eintheilung
der Vierecke
in Quadrata
Rectangula
Rhombos
und Rhom-
boides, wel-
che mit einem
Nahmen Pa-
rallelogram-
ma heißen.

linie gezogen wird, so heißt man sie die Diagonallinie. So sind die beide Linien *DB* in den beiden Vierecken *ABCD* die Diagonallinien. Nun sieht man schon, daß ein jedes Viereck durch die Diagonallinien in zwey Dreyecke getheilt werde; da nun die Summe der Winkel in einem Dreyeck 180° macht, so wird sie in zweyen $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ machen. Folglich ist die Summe aller Winkel in einem geraden nichten Viereck, es mag hernach aussehen wie es will, und regulair oder irregulair seyn, 360° . Nun gibt es regulaire und irregulair Vierecke; ein regulaires Viereck entstehet, wenn entweder alle vier Seiten und Winkel einander gleich sind, da es dann ein Quadrat heißt; oder wenn alle vier Winkel und je zwey und zwey parallele Seiten einander gleich sind, in welchem Fall es ein länglichtes Rectangulum genannt wird; oder wenn zwar alle vier Seiten aber nur je zweyen und zweyen Winkel einander gleich sind, wodurch ein Rhombus entstehet; oder endlich, wenn nur zweyen Winkel und zwey Seiten allemal einander gleichen, da dann ein Rhomboides heraus kommt. Alle diese Gattungen von Vierecken werden mit einem Nahmen Parallelogramma genannt. Und diese Vierecke theilet nun die Diagonallinie in zweyen gleiche Theile. Das wollen wir beweisen. Die 25. Fig. stellet einen Rhombus vor;

DB

DB ist die Diagonallinie. Nun ist nach Tab. II.
den gegebenen Erklärungen Fig. 25.

$$AB = DC$$

$$AD = BC$$

$$DB = DB.$$

$$\triangle ADB = \triangle DBC.$$

Eben so beweist man diesen Satz bey den Quadraten, länglichten Vierecken, und Rhomboiden. Wir wollen daher unsere Leser nicht ohne Noth damit aufhalten; aber müssen wir noch erinnern, daß diesen nun bewiesenen Satz sich wohl einprägen solle; wir werden ihn in der Lehre von dem Flächenmaas oder in der Planimetrie mit grossem Nutzen gebrauchen können. So viel dürfen wir vorläufig schon sagen, und unsere Leser werden es auch verstehen, daß alle nur mögliche geradelinichte Dreiecke verdoppelt, und durch diese Verdopplung in ein regulaires Viereck, nemlich entweder in ein Quadrat, oder Rectangulum, oder Rhombus oder Rhomboides verwandelt werden können. Uebrigens haben wir den Namen eines regulären Vierecks allen dieser Gattungen mit Fleiß gegeben; dann obnerachtet das Quadrat das regulaireste ist, und man sonst die regulaire Vierecke durch solche Figuren erklärt, welche lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, so glauben wir doch, wir könnten bey dem Viereck eine Ausnahme machen; weil die be-

Die Diagonallinie theilen alle Parallelogramma in zween vollkommen gleichen Theile.

Und ein jedes geradelinichte Dreieck kann durch die Verdopplung in ein Parallelogramm verwandelt werden.

namste Gattungen in der That viel regulaires haben, und ein Anfänger die Sache besser fasset, wenn man verschiedene Dinge, die vieles mit einander gemein haben, unter eine Hauptgattung bringet. Was aber die andere Vielecke betrifft, so behalten wir die gewöhnliche Eintheilung und Erklärung bey. Um nun wieder auf die Vierecke zu kommen, so wird der Winkel im Quadrat und länglichten Rectangulo allemal ein rechter Winkel seyn. Dann die Summe aller Winkel im Viereck macht 360° ; im Quadrat und Rectangulo sind alle vier Winkel einander gleich, nach der gegebenen Erklärung; folglich ist ein jeder $= \frac{360}{4} = 90^\circ$. Das ist ein rechter Winkel. Wenn in dem Rhombus oder Rhomboides ein Winkel gegeben ist, so wird man die übrige leicht finden können. Dann es seye ein Winkel 30° , so wird der gegenüberstehende auch 30° , folglich zweyen 60° , da nun alle vier zusammen 360° machen; so werden die zweyen übrige 300° ; folglich weil beide gleich sind, einer 150° halten. Alle Vierecke, welche zu den bisher benannten Gattungen nicht gehören, sind irregulair; sie werden auch mit einem besondern Namen Trapezia genannt. Dergleichen eines in der 26. Fig. vorgestellt wird.

6. 153. Nach den Vierecken kommen die übrige Vielecke vor; nemlich Fünfecke, Sechse,

Der Winkel im Quadrat und Rectangulo ist allemal ein rechter.

Von denen Winkeln des Rhombus und Rhomboides.

Was die Trapezia seyen.

Sechsecke, Siebenecke u. s. w. welche mit ^{alle} Figuren einem allgemeinen Namen Vielecke genannt werden. Sie sind entweder regulair oder irregulair; jene bestehen aus lauter gleichen Seiten und Winkeln; diese aber nicht. Beide werden durch Diagonallinien in so viel Dreiecke getheilt, als ^{welche mehr als vier Ecken haben, heißen mit einem allgemeinen Namen Vielecke oder Polygone.}

se Seiten haben, weniger zwey; 3. E. ^{Alle Vielecke lassen sich durch die Diagonallinien in so viel Dreiecke theilen, als sie Seiten haben, weniger zwey.} ein Viereck hat vier Seiten, und kann in zwey Dreiecke, das ist $4 - 2$ getheilt werden; ein Fünfeck hat fünf Seiten, und kann in drey Dreiecke, das ist $5 - 2$ getheilt werden; ein Sechseck hat sechs Seiten, und kann in 4 Dreiecke, das ist $6 - 2$ durch die Diagonallinien getheilt werden

u. s. w. wie man durch eine Induction bald zeigen kann. Wenn also die Anzahl der Seiten n ist, so werden die Dreiecke, darein die Figur getheilt wird, $n - 2$ seyn; folglich siehet man abermal, wie man auch hier die Summe aller Winkel leicht finden könne; sie ist nemlich allemal $(n - 2) \cdot 180$. Fragt man, wie viel Diagonallinien gezogen werden können, so wird man auch

den, durch die Induction es leicht ausmachen, daß in einem Viereck eine, im Fünfecke zwey, im Sechsecke drey u. s. w. Folglich drey weniger als das Vieleck Seiten hat, gezogen werden können. Wenn also die Anzahl der Seiten n ist, so ist die Summe aller Diagonallinien, die sich aber nicht durchkreuzen dürfen $= n - 3$. Nun

B b f

kann

Wie man die Seite und Winkel eines regulären Vielecks finden könne; kann man billig fragen, wie man die Seite eines regulären Vielecks finde; Es sind nun zwey, nemlich das Viereck und das Sechseck, das sich durch den Cirkel und lineal, ohne algebraische Rechnungen, bestimmen lassen. Ein reguläres Vieleck hat lauter gleiche Winkel; und zwar so viel Winkel als es Seiten hat, da nun viel Winkel als es Seiten hat, da nun die Summe aller Winkel $(n-2) \cdot 180$ ist, so wird der Winkel des regulären Vielecks allemal seyn $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$; wenn also

$$n = 6; \text{ so ist der Winkel des Sechsecks } \frac{(6-2) \cdot 180}{6} = \frac{4 \cdot 180}{6} = \frac{2 \cdot 180}{2} = \frac{360}{2} = 120.$$

Das reguläre Sechseck läßt sich geometrisch leicht bestimmen. Wenn ich nun einen Cirkel beschreibe, und den Radius zur Sehne mache, hernach aus dem Mittelpunkt C an die beide Ende der Sehne wiederum Radios ziehe; sodann an die erste Sehne hin den Radius noch einmal als eine Sehne im Cirkel auftrage, und die vorige Operation fortsetze; so bekomme ich gerade den Polygonwinkel $2 \cdot 60 = 120$; dann die beide Dreiecke sind gleichseitig, weil ihre Seiten lauter Radii sind, folglich haben sie auch den gleichen Winkel; demnach ist ein jeder der dritte Theil von 180° der Summe der Winkel, das ist $\frac{180}{3} = 60$. Dieser Winkel wird im Sechseck verdoppelt; folglich wird ein reguläres Sechseck beschrieben, wenn man den Radius sechsmal in der Perip

Peripherie eines Kreises herumträgt. Weil man nun aus dem Mittelpunkt an alle Ecke des Vielecks oder Polygons Linien ziehen kann, so werden dadurch nicht nur so viel Dreiecke als es Seiten hat, sondern auch so viel gleiche Winkel am Mittelpunkt entstehen; da nun die Summe aller Winkel an dem Mittelpunkt herum zusammen genommen 360° ; so wird ein Winkel an dem Mittelpunkt, wenn die Anzahl der Seiten n heisset, seyn $\frac{360}{n}$; folglich im

Sechseck $\frac{360}{6} = 60$. Man sieht also,

daß man aus der gegebenen Anzahl der Seiten den Polygonwinkel und den Winkel am Mittelpunkt finden kann; wird demnach die Seite wirklich gegeben, so läßt sich allemal ein Vieleck entweder geometrisch oder doch mechanisch beschreiben.

Wie sich ein jedes Vieleck mechanisch bestimmen lassen!

Dieses gehört nun zur ausübenden Mathematik; in der Civil, und besonders in der Militärbaukunst, bey Festungsgebäuden, hat die Lehre von den Polygonen ihren Nutzen. Wir lassen uns aber in das praktische nicht ein. Das regulairste Viereck, nemlich das Quadrat, läßt sich auch geometrisch in den Kreis einschreiben;

In welchem Theil der ausübenden Mathematik die Lehre von den Polygonen vorzüglich zu wissen nöthig seye.

dann man richtet nur auf dem Diameter zu beiden Seiten zwey gleichschenkelichte Dreiecke auf, deren Spitzen an die Peripherie stoßen, so werden sie zusammen

Wie man ein Quadrat geometrisch bestimmen und in den Kreis einschreiben, das ist, seine Seite finden könnte.

die Winkel an der Peripherie sind rechte Winkel. §. 147. Folglich müssen die andere zwey auch rechte seyn; dann die Hefte von jedem ist 45° , weil die Dreyecke gleichschenkligh sind; demnach sind die Winkel selbst 90° groß. Eben so ist klar, daß alle vier Seiten gleich seyn müssen, weil die beede Dreyecke gleichschenkligh, und eines so groß als das andere ist. Durch Hülfe der Buchstabenrechnung kann man noch andere Vielecke finden, welche hernach geometrisch bestimmt werden können. Wir wolten auch einige Exempel im folgenden Anzeige, wie geben; unerachtet man in der Ausübung sich auch an sich nicht viel darnach richtet, sondern gemeiniglich die Aufgabe mechanisch durch Hülfe der verschiedenen Instrumente aufgelbracht bestimmen lassen.

Wir zu schdrfen vorgetragen werden, als daß sie sonst besonders brauchbar wären. Es gibt aber ohne diese noch andere, und weit schönere Exempel, welche die Scharfsinnigkeit üben, wie wir im folgenden sehen werden; daher wir dißfalls uns kürzer ausdrücken dürfen; dann man siehet leicht, daß in der Buchstabenrechnung eine solche Menge von Exempeln möglich seye, deren Summe sich kaum bestimmen ließe. Wolte man nun so viele Exempel vortragen, so müßte man sich in die größte Weltläufigkeit einlassen. Diß aber ist unserm

unserm gegenwärtigen Vorhaben nicht gemäß.

§. 154. Wir haben alles vorgetragen, was in dem Längenmaas zu wissen nöthig ist; der Weg zum Flächenmaas oder zur Planimetrie ist also nunmehr gebahnet.

Die Fläche einer Figur wird betrachtet in so ferne sie eine Länge und Breite aber keine Dicke hat; was demnach blos in die Länge und Breite ausgedehnt ist, das heißt man eine Fläche; nun kann ich eine Fläche nicht anders als wiederum mit einer Fläche ausmessen. Die Frage ist also nur diese, was ich für eine Fläche zum Maas annehmen soll, ob sie rund, oder viereckicht, oder dreyeckicht u. s. w. seyn solle. Die Antwort wird wohl diese seyn, man solle diejenige Fläche wäh'len, welche die schicklichste ist; nun werden wir bald erfahren, daß die viereckichte Fläche, welche gleich lang und breit ist, das ist ein Quadrat, am dienlichsten sey, alle andere Flächen auszumessen, und daß der einem natürlichen Weise einfallende Gedanke, wie man dann mit einem vollkommenen Viereck, wenn es auch noch so klein wäre, in die Spitze der Dreyecke hinein kommen, und selbige ausmessen könne, durch den Weg der Reduction von selbst sich werde heben lassen. Wir nehmen also zum Maas aller nur denkbaren Flächen ein Quadrat oder eine viereckichte Fläche, die rechtwinklicht

Vorbereitung zum Flächenmaas oder zur Planimetrie.

Flächen werden wiederum durch Flächen ausgemessen.

Was man für eine Fläche zum Maas annehmen solle,

und wie die viereckichte, und unter diesen das Quadrat, die schicklichste seye, und zum Maas aller möglichen Flächen gebraucht werden könne.

Ob man dann mit einem Viereck die in voriger Flächen sich verlierende

Dreysack u. f. und gleich lang und breit ist, dergleichen
 w. auch aus- in der 27 Fig. neune angebracht sind, und
 messen könne, und wie man sehen, weil man mit den leichtesten und
 sich d'iffalls gewiffesten Exempeln den Anfang machen
 durch die Re- duction oder muß, wie oft sich ein solches Biered in
 Verwandlung einem andern rechtwinklichten Biered her
 einer Fläche um legen lasse Wenn man z. E. von
 in eine ande- re helfe. Papier eine Fläche so groß als $ABCD$

Tab. II.

Fig. 28.

Wie man ei- eine kleinere auch von Papier ausgeschnit-
 ne rechtwint- tene $Adef$ zum Maas annimmt, so legt
 lichte Fläche man die kleinere in der größern so oft her-
 das ist ein um, als man kann, und merkt sich hernach
 Quadrat die Zahl, wie oft man die kleinere Fläche
 oder ein Re- in der größern herum gelegt habe; da dann
 ctangulum wirklich aus- der Inhalt der Fläche selbst, z. E. in der
 messe. vorgegebenen Fläche durch 15 kleinere und
 zum Maas angenommene Flächen, bestim-
 met wird. Nun begreift man leicht, daß
 wir dieses Maas kürzer finden können.
 Dann wenn ich die Figur ansehe, so finde
 ich, daß durch diese fünfzehnmahlige Um-
 lung der kleinern Fläche die Grundlinie
 AD in fünf, und die Höhe AB in drey
 gleiche Theile getheilt werde, weil die klei-
 nere Fläche sich selbst überall gleich bleibt.
 Ich würde also, wenn ich die Grundlinie
 oder die Breite $= 5'$ mit der Höhe $= 3'$
 multiplicire, auf einem kürzern Weg eben
 so viel gefunden haben, als wenn ich meine
 zum Maas angenommene Fläche wirklich
 15 mal herum gelegt hätte. Eben so finde
 ich

und wie man
 das Maas
 kürzer und
 schneller fin-
 den könne,
 nemlich
 durch die
 Multiplicas-
 tion der
 Grundlinie
 in die Höhe,
 oder im Qua-
 drat, durch
 die Multipli-
 cation der
 Grundlinie
 mit sich selbst.

ich in der 27. Fig. wenn die Breite und Höhe gleich ist, das ist, wenn $AB=AD$, einerley Inhalt, ich mag die angenommene Fläche 3. E. in der vorgegebenen Figur neunmal wirklich herum legen, oder blos die Grundlinie $AD=AB=3$, mit sich selbst multipliciren; dann weil die Höhe und Breite einerley ist, so ist $AD \cdot AB=AD \cdot AD=AD^2=3 \cdot 3=3^2=9$. Man wird daher am besten thun, wenn man bey einem vorgegebenen rechtwinklichten Viereck die Breite mit der Höhe, und wenn die Höhe der Breite gleich ist, die Breite mit sich selbst multiplicirt; das Product muß allemal der gesuchte Inhalt der Fläche seyn. Wenn also die Breite 5' und die Höhe 3' beedes nach dem Längenmaas hält, so wird der Inhalt des ganzen Vierecks nach dem Flächenmaas seyn 15' von welchen 15' ein jeder Flächen-
 schuh einen Schuh lang und einen Schuh breit ist. Weil nun im Längenmaas ein Schuh 10" hält, so wird ein Schuh im Flächenmaas $10 \cdot 10''=100''$ halten. Dann weil die Breite und Höhe gleich ist, oder weil die Breite 10" und die Höhe 10" beträgt, so darf ich nur 10 mit 10 multipliciren, da dann das Product 100" einen Schuh im Flächenmaas geben wird, ein solcher Schuh heißt ein Quadrat-
 schuh, weil alle rechtwinklichte Vierecke, die gleich lang und breit sind, Quadrate heißen

Tab. II.
Fig. 27.

400 Geom. I. Cap. Von der dreyfachen

welches aus
der Decimal-
progression
im Längen-
maas erhel-
let,

dahero man
im Quadrat-
maas, das
von 100 zu
100 gehet, al-
lemal je zwei
Zahlen für
die Ruthe,
Schube u. s. f.
m. abschnei-
det,

Wie viel Zoll
auf einen
Schub, und
wie viel
Schube auf
eine Ruthe
von den Feld-
messern in
unserm Lande
gerechnet
werden;

heissen. Da nun eine geometrische Ru-
the 10' lang ist, so wird auch eine Qua-
dratruthe 10. 10' das ist, 100 Quadrat-
schube in sich halten; auf gleiche Weise
findet man, daß ein Quadrat Zoll, der 10''
lang und breit ist, 100 Quadratlinien in
sich begreift. Demnach gehet das Glä-
chenmaas von hundert zu hundert, und
wie z. E. im Längenmaas 10 Zoll einen
Schub, 10 Schub eine Ruthe geben, so
machen im Flächen; oder Quadratmaas
erst 100 Quadrat Zoll einen Quadratschub,
und 100 Quadratschube eine Quadrat-
ruthe aus. Dahero muß man allemal je
zwo und zwo Zahlen für die Quadratli-
nien, Zolle und Schube abschneiden; z. E.
2 4 8 6 7 5 9''' sind 2° 48' 67" 59"', das
ist, 2 Ruthe, 48 Schube, 67 Zoll, 59
Linien im Quadrat. Die Sache ist leicht
begreiflich. So oft ich von einer niedern
Gattung meines Maases 100 habe, so oft
bekomme ich eine Einheit für die unmittel-
bar folgende Gattung entweder der
Schube, oder Ruthe u. s. m. Z. E.
124' im Quadratmaas sind eine Ruthe
und 24 Schube; weil 100 Schube eine
Ruthe ausmachen, folglich $100' + 24' = 124'$.
Ich denke, ich habe mich je-
zo deutlich genug ausgedrückt. Im ge-
meinen Leben und in der Ausübung geht
man vom geometrischen Maas hie und da
ab, wie wir schon gezeigt haben. Bey
uns

uns hält im Längenmaas eine Ruthe 16' und wie sie
 folglich eine Quadratruthe $16 \cdot 16' = 256'$; und wie sie
 ein Schuh hält im Längenmaas 12 Zoll, der Aus-
 folglich ein Quadratschuh $12 \cdot 12 = 144''$ bang dergleichen
 u. s. w. Die Geometrie bleibt bey ihrer
 Progression von 10 zu 10, und im Qua- keine allge-
 dratmaas von 100 zu 100, wie im Cubic: meine Neben-
 maas von 1000 zu 1000; wer aber die
 Feldmesskunst dazu lernen und ausüben einkommungs-
 will, der muß sich erkundigen, was man sich Ande-
 in demjenigen Land, wo er sein Brod da: folglich man
 mit verdienen will, für ein Maas habe;
 in welchem Fall er hernach bald fortkom: eben sich nach
 men wird. Damit aber geben wir uns, den Gewohn-
 nach unserm schon mehrmalen angezeigten
 Vorhaben, gar nicht ab. Unsere Leser beiten eines
 werden daher auch keine weitere Nach: jeden Landes
 richten von dem Feldmessen u. s. w. von eichem Maß;
 uns erwarten. Uns genügt, daß wir ge-
 zeigt haben, wie man überhaupt eine Flä: fa.
 che ausmesse, und wie man ein beliebiges
 Viereck, wenn es nur rechtwinklicht und
 gleich lang und hoch ist, dazu wählen dür-
 fe, es mag hernach die Länge des Schu-
 hes nach dem Arm oder nach dem Fuß et-
 nes Mannes oder eines Kindes u. s. w.
 angenommen werden. Nur muß man,
 wenn das Maas einmal angenommen und
 festgesetzt worden ist, in der ganzen Rech-
 nung beständig dabey bleiben.

§. 155. Die nächste Frage meiner Les-
 ser wird jezo wohl diese seyn, wie man es

Ec

maas

Wie man
schiefe Pa-
rallelogram-
ma aufrecht-
winklichte,
reduciren
und ausmes-
sen solle.

Versuch, ob
die Ver-
wandlung
angehe;

Tab. II.
Fig. 19.

und was
man, die Ver-
bindung des
Versuchs zu
vollenden,
für Linien zie-
hen müsse.

make, wenn man schiefstliegende Figuren; und zwar erstlich Vierecke, die keine rechte, sondern stumpfe, oder spitzige Winkel haben, auszumessen härte; dann aus dem bisherigen versteht man noch nicht, wie man in diesem Fall zu Werke gehen solle. Wir wollen zuerst einen Rhombus oder Rhomboides betrachten. Ich solle ihn durch ein rechtwinklichtes Viereck ausmessen. Das aber läßt sich nicht thun, daß ich ihn durch die Reduction in ein rechtwinklichtes Viereck verwandle, welches von einerley Grösse ist. Nun will ich einen Versuch wagen, ob etwa diese Verwandlung angeht. Die auszumessende Figur seye der Rhomboides $ADFG$; Ich sehe wohl, daß ich mit meinem rechtwinklichten Viereck, in der 27. und 28. Figur, durch das Herumlegen derselben, bey den spitzen und stumpfen Winkeln in F und G nicht wohl zukommen kann, und doch möchte ich gern das Maas so genau wissen, als es möglich ist. Ich versuche daher die Verwandlungskunst. Wenn ich die Figur $ADFG$ in die Figur $ABCG$ also verwandeln kann, $ABCG$ ein rechtwinklichtes Viereck und der vorigen Figur vollkommen gleich ist, so werde ich aufs genaueste ausmessen können. Man mache also einen Versuch, und verlängere die Linie DF , welche mit AG , kraft der Natur des Rhomboides parallel ist, bis in B ; hernach

hernach richte man auf AG ein rechtwinkliches Viereck auf, dessen Grundlinie AG und dessen Höhe die Distanz der beiden Parallellinien, folglich die Perpendiculare Linie CG oder AB ist; so wird $ABCG$ ein rechtwinkliches Viereck seyn, dessen Inhalt $AG \cdot AB$ ist. §. 154. Nun wollen wir sehen, ob es dem Rhomboides $ADFG$ gleich ist; dann in diesem Fall hätten wir seinen Inhalt hernach schon gefunden. Man betrachte die zwey Dreyecke BAD und CGF , welche wie ein lateinisches W gleichsam in einander stecken; so wird man bald sehen, daß sie einander gleich und ähnlich seyen. Hat man das gefunden, so subtrahire man beiderseits das Stück CED , und addire wieder beiderseits das Stück AEG , da sich dann ergeben wird, daß $ABCG = ADFG$. Wir wollen den Beweis hersehen. Zuerst beweisen wir, daß die Linie BD gleich seye der Linie CF ; dann

Bemerk, daß die Ver- wandlung vollkommen angehe.

$$\begin{array}{l} BC = AG \\ DF = AG \\ \hline BC = DF \\ CD = CD \\ \hline BC + CD = CD + DF \text{ das ist} \\ BD = CF \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{weil es Parallellinien} \\ \text{sind, folglich} \end{array}$$

Jetzt können wir erst beweisen, daß die beide Dreyecke BAD und CGF einander gleich seyn. Dann, wie wir bewiesen haben, so ist

Ec 2

BD

404 Geom. I. Cap. Von der dreyfachen

$$BD = CF, \text{ ferner } \S. 152.$$

$$BA = CG$$

$$DA = FG \text{ folglich } \S. 144. \text{ nr. I.}$$

$$\triangle BAD = \triangle CGF. \text{ ferner } \S. 9.$$

$$\triangle CED = \triangle CED \text{ subtrahirt:}$$

$$\triangle BAD - \triangle CED = \triangle CGF - \triangle CED, \text{ das ist, wenn man die Figur ansieht:}$$

$$BAEC = DEGF. \text{ nun ist,}$$

$$\triangle AEG = \triangle AEG \text{ dieses addirt, gibt}$$

$$BAEC + \triangle AEG = DEGF + \triangle AEG; \text{ d. i. wenn man die$$

$$ABCG = ADFG. \text{ welches zu erweisen war.} \text{ Figur ansieht:}$$

Wie man den Beweis der Phantastie deutlich machen könnte.

Allgemeine und höchst fruchtbare Hauptregel, daß alle Parallelogramma von einerley Grundlinien und Höhen einander gleich seyn;

und wie man die die Gleichheit, Aehnlichkeit und Congru-

Wenn es einem ungewohnt ist, bald ein Stück hinweg, bald wieder hinzu zu denken oder zu setzen, so darf er nur so zwei Figuren von Pappendeckel oder Chartenpapier ausschneiden, und selbige in der Ordnung, wie die Figur aufweist, auf einander legen, so wird er den Beweis seiner Phantasie so klar machen, als es möglich ist. Der Lehrsatz selbst ist von grossem Gewichte, und wird in Worten also ausgedruckt: Zwey Parallelogramma, welche einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich. Wir sagen gleich, nicht aber, ähnlich. Unsere Leser werden daher an die Sätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit in die Einleitung §. 10. zurück denken. Dann ein anders ist congruent oder beedes gleich und ähnlich, ein anders hingegen allein gleich, nicht aber auch ähnlich seyn. Fern-

ner werden sie verstehen, was wir durch ^{es wohl un-} die Höhe anzeigen; nemlich eine Perpen- ^{terscheiden} dicularlinie, welche zwischen denen beiden ^{müsse;} Parallellinien, worein die Figuren fallen, ^{was man} oder welche von dem Ende einer Figur ^{durch die Hö-} auf ihre Grundlinie herabgezogen wird. ^{be einer Fi-} So ist z. E. die Höhe eines mit Fleiß ^{gur versteht,} schief gebauten Thurms, dergleichen einer ^{ständig er-} zu Bononien seyn solle, nicht die Schiefe, ^{klärt.} sondern die senkrechte Linie, die von der Spitze auf die Erde perpendicular herabgefallen wird; Eben so ist auch die Höhe des Dreyecks ACB nicht CB oder AC , sondern die Perpendicularlinie CD ; dann so weit steht seine Spitze C von der Grundlinie AB , welche bis D verlängert wurde, ab .

Tab. II
fig. 30.

Dem bisher gegebenen Beweis von Verwandlung der Parallelogrammen wollen wir noch einen beyfügen, woraus man lerne, daß ein jedes Quadrat in ein Rectangulum und umgekehrt verwandelt werden kann. Man verlängere von dem gegebenen Quadrat $FIDE$ die Seite DE , bis DC der Höhe des Rectanguli gleich ist, in welches man es verwandeln will; man ziehe von C durch I die Linie CG , welche die verlängerte FE in G schneidet; man mache das Dreyeck AGC dem Dreyeck EGC gleich; so wird $ABIH = IDEF$; dann es ist

Tab. I.
fig. 22.
 β .

Ec 3

$\triangle EGC$

$$\triangle EGC = \triangle AGC$$

$$\triangle GIF = \triangle GHI, \quad \text{subtr.}$$

$$\triangle EGC - \triangle GIF = \triangle AGC - \triangle GHI \text{ d. i. in der Figur}$$

$$FICE = ACIH, \quad \text{weil ferner}$$

$$\triangle BIC = \triangle DCI; \text{ diese subtr. lassen}$$

$$FICE - BIC = ACIH - DCI, \text{ das ist in der Fig.}$$

$$FIDE = ABIH.$$

Wenn also in einem Parallelogramm die Diagonallinie gezogen, und in selbiger nach Belieben ein Punkt, wie *I* angenommen wird, durch welchen man mit der Seite des Parallelogramms die Parallellinien *HD* und *BF* zieht, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die zwey, durch welche die Diagonallinie nicht geht, einander gleich sind. Auf eine ähnliche Weise begreift man, daß sich Triangel in Parallelogramme und umgekehrt verwandeln lassen, wie ich in meinem mathem. Lehrbuch ausführlich gezeigt habe.

Neue Frage, §. 156. Nun wird man nicht ohne Grund weiter einwenden, und sagen: es gibt nicht lauter Parallelogramme, die man ausmessen solle; sondern auch ganz irreguläre Vierecke, und überhaupt sowohl regulärer als irregulärer Vielecke eine Menge. Wir haben also für das Maas dieser letztern noch nichts gewonnen.

Beantwortung der Frage, wobei gesagt wird, nur mögliche geradelinichte Dreyecke ausmessen;
Allein es ist durch den schon erwiesenen Lehrsatz dennoch ungemein viel, ja alles gewonnen. Dann wir lernen dadurch alle

messen; da sich nun alle geradelinichte Fi-
guren, sie mögen Rahmen haben, was sie
für wollen, durch Diagonallinien in Dren-
ecke eintheilen lassen: so können wir durch
Hülfe unseres erwiesenen Lehrsatzes alle
nur denkbare geradelinichte Figuren genau
ausmessen. Wie man nun ein Dreueck
überhaupt nach dem Lehrsatz §. 151. aus-
messen könne, wollen wir jezo zeigen. Ein
jedes Viereck kann duplirt und durch die
Duplirung in ein Parallelogrammon wer-
den, es mag hernach ein Quadrat oder
Rhombus oder Rectangulum oder Rhom-
boides seyn. §. 152. Folglich ist ein Dren-
eck allemal die Helfte von einem Paralle-
logrammo, das einerley Grundlinie und
Höhe mit ihm hat. Da man nun alle
Parallelogramma genau ausmessen kann,
so wird man auch ihre Helfte ausmessen
können. Das siehet man in der Figur selbst.
Man ziehe die Diagonallinien AC und
 AF ; so wird §. 152. der $\triangle ABC = \triangle ACG$,
und der $\triangle ADF = \triangle AFG$. Folglich AGC
 $= \frac{1}{2} ABCG$, und $AFG = \frac{1}{2} ADFG$.
Nun ist der Beweis leicht zu verstehen.

$$ABCG = ADFG \quad \S. 154.$$

$$\frac{1}{2} ABCG = \frac{1}{2} ADFG.$$

$$\triangle AFG = \frac{1}{2} ADFG$$

$$\frac{1}{2} ABCG = \triangle AFG$$

$$\frac{1}{2} ABCG = \frac{AG \cdot AB}{2} \quad \S. 153.$$

$$\triangle AFG = \frac{AG \cdot AB}{2} = AG \cdot \frac{1}{2} AB.$$

Ec 4

Also

Also ist das Maas eines noch so schiefen Dreyecks das Product aus der Grundlinie in die halbe Höhe; oder das halbirte Product aus der Grundlinie in die Höhe; oder das Product aus der Höhe in die halbe Grundlinie; dann alle diese Ausdrücke gelten gleichviel. Demnach ist der Inhalt des Dreyecks ACB in der 30. Figur gleich dem Product aus seiner Grundlinie AB multiplicirt in die halbe Höhe $ED = AB \cdot \frac{1}{2}CD = \frac{AB \cdot CD}{2} = CD \cdot \frac{1}{2}AB$.

Tab. II.
fig. 30.

Ein jedes geradlinich-tes Dreyeck kann in ein vollkommenes Quadrat verwandelt werden.

Warum alle geradlinich-ten Figuren sich vollkommen ausmessen lassen.

Tab. II.
fig. 31.

Oder wenn wir AB setzen $= b$ und $ED = a$, so ist der Inhalt $= \frac{ab}{2}$; wenn ich also aus $\frac{ab}{2}$ die Quadratwurzel extrahire, so habe ich die Seite von einem Quadrat, das dem Dreyeck ACB vollkommen gleich ist. Wie man dieses geometrisch bewerkstelligen könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Uebrigens siehet man, daß sich durch Hülfe des erwiesenen Lehrsatzes alle mögliche geradlinich-ten Figuren ausmessen lassen; dann ihr Inhalt ist eben allemal die Summe aller durch die Diagonallinien darinn beschriebener Dreyecke; und es kann nicht anders seyn; weil nothwendig das ganze seinen wirklichen Theilen zusammen genommen allemal gleich ist. Bey den Trapezien, welche zwei parallele Seiten haben, gehet die Rechnung noch leichter; dann ihr Inhalt ist das Product der halben Summe der parallelen Seiten in die Höhe;

man

man sehe nur die 32. Fig. so wird sichs leicht
geben:

$$ABC = \frac{1}{2} AC \cdot EB$$

$$BDC = \frac{1}{2} BD \cdot EB$$

$$ABDC = (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BD) EB.$$

§. 157. Das aber könnte einem noch
fremder vorkommen, daß man auch durch Ob und wo
Hülfe dieses nemlichen Lehrsatzes die Ein man auch ein
kel, folglich krummlinichte Figuren, so ne Eirkelsab
zumlich genau ausmessen könne. Dann die durch
die vollkommene Quadratur des Eirkels obigen Lehr
ist noch jezo eine Aufgabe, deren Erfin sages aus
dung zwar nicht so einträglich, aber doch men
schön wäre. Inzwischen ist man der
Wahrheit durch die versuchte Rectification
der Peripherie so nahe gekommen, daß man,
wenn die Eirkel nicht allzugroß sind, keinen
merklichen Fehler begeht. Vorläufig muß
man sich aus dem vorübergehenden §. erin Wie mehrere
uern, daß ein Triangel leicht in einen an Dreyecke von
dern gleich grossen verwandelt werden kön gleicher Hö
ne, wenn man durch seine Spitze *H* mit Tab. II.
der Grundlinie *BD* eine Parallellinie *FC* fig. 31.
ziehet, und sodann nach Belieben andere he u. Grund
Dreyecke, wenn sie nur einerley Grund, linie in einem
linie haben, und zwischen einerley Paral einigen ver
lellinien stehen, z. E. das Dreyeck *DCB* wandelt wer
u. s. w. beschreibet. Demnach wird das den.
Dreyeck $DCB = DHB$; ferner $ECD =$
 EGD , u. s. w. wenn nun, wie wir sehen
wollen, alle Dreyecke *AFE*, *EGD*, *DHB*
einerley Höhe haben, so wird das grosse
Ec 5 $\triangle ACB$

410 Geom. I. Cap. Von der dreyfachen

$\triangle ACB$ der Summe dieser Dreyecke zusam-
men genommen gleich seyn. Dann

$$\triangle DHB = \triangle DCB$$

$$\triangle EGD = \triangle ECD$$

$$\triangle AFE = \triangle ACE$$

$$\triangle DHB + \triangle EGD + \triangle AFE = \triangle DCB + \triangle ECD + \triangle ACE.$$

$$\triangle ACB. \qquad \qquad \qquad = \triangle DCB + \triangle ECD + \triangle ACE.$$

$$\triangle ACB. \qquad \qquad \qquad = \triangle DHB + \triangle EGD + \triangle AFE.$$

Nun kann der Cirkel betrachtet werden als
ein Unendlicheit, oder als ein Vieleck
von unendlich vielen Seiten; deren jede
die Grundlinie von einem Dreyeck ist, des-
sen Spitze in den Mittelpunkt gehet, und
dessen Höhe dem Radius gleich ist, weil
die Grundlinie unendlich klein, und folge-
lich die Perpendicularlinie von den Schen-
keln des Dreyecks fast um gar nichts un-
terschieden ist. Wenn nun der Cirkel in
Gedanken aufgemacht wird, so daß die Per-
ipherie in eine gerade Linie sich verwand-
elt, so werden die unendlich viele Drey-
ecke, wie diejenige, die in der 31. Figur
gezeichnet sind, im kleinen aussehen; folge-
lich kann man die Summe aller dieser Drey-
ecke in ein einiges, wie ACB , verwand-
eln, dessen Höhe der Radius BC , und
dessen Grundlinie die Peripherie AB ist;
folglich wird der Inhalt seyn $\frac{AB \cdot BC}{2}$; wenn

man nur die Peripherie des Cirkels π und
den Radius r nennet, so ist der Inhalt des
Cirkels $\frac{\pi r}{2}$; Auf diesen Ausdruck ist der
große Mathematikus Keppler, wie vor
ihm:

Was man
durch diese
Verwand-
lung bey-
dem Raas
der Cirkel
fläche gewin-
ne, und wie-
lich die Perpendicular-
linie von den Schen-
keln des Dreyecks
fast um gar nichts
unterschieden ist.
Wenn nun der Cirkel
in Gedanken aufgemacht
wird, so daß die Per-
ipherie in eine gerade
Linie sich verwand-
elt, so werden die un-
endlich vielen Drey-
ecke, wie diejenige,
die in der 31. Figur
gezeichnet sind, im
kleinen aussehen;
folglich kann man die
Summe aller dieser
Dreyecke in ein eini-
ges, wie ACB , ver-
wandeln, dessen Höhe
der Radius BC , und
dessen Grundlinie die
Peripherie AB ist.

Ein Aus-
druck, auf
welchen der

Wäre Archimedes auf die Figur, zuerst ge- große Kreis-
fallen. Wenn man also wüßte was π wä- ler zuerst
re, so würde der Inhalt des Eirkels genau gefallen ist.

gefunden werden; und der Ausdruck $\frac{\pi}{2}$ Der Aus-
würde sich auf alle Eirkel anwenden lassen, ² druck ist all-
weil sie alle einander ähnlich sind §. 10. ¹ gemein, und
oder weil der Radius eines kleinen Eirkels ² schicket sich
selbst, auf alle Eir-
selbst zu seinem Eirkel verhält wie der Ra-
dius eines grossen Eirkels zu seinem Eir- Tab. I.
kel. §. 140. Man kann auch die fünfte Fig. 5.
Figur damit vergleichen; aus welcher er-
hellert, daß alle mögliche Eirkel einen ge-
meinschaftlichen Mittelpunkt haben, oder
concentrisch vorgestellt werden können; das-
hero die Bögen BD und bd , folglich auch weil der Ra-
die ganze Peripherien sich verhalten müssen, dius zur Pe-
wie die Radii CB und Cb ; wie wir unab- ripherie im-
hängig von dem Eirkel im folgenden erwei- mer einerley,
sen werden. Man merket also, daß die Verhältniß
Verhältniß des Radius, folglich auch des
doppelten Radius oder des Diameters zur
Peripherie beständig bleibt, und nicht ver-
ändert wird; die Eirkel mögen groß oder
klein seyn. Weil wir aber keinen Aus- Warum aber
druck für die Eirkelsfläche finden können, dem unge-
in welchem die Peripherie nicht mit in die Eirkel nicht
Rechnung käme, so wäre freylich zu wün- völig qua-
schen, daß man sie rectificiren oder in eine drirt oder in-
gerade Linie verwandeln könnte. Accurat verwandelt
hat sich diese Verwandlung bisher noch werden könn-
nicht finden lassen; doch ist man der Wahr- heit

heit durch mühsame und lange Rechnungen so nahe gekommen, daß der Fehler bey kleinen Cirkeln fast gar nichts beträgt. Dann wie man aber doch dem wahren Quadrat durch mühsame Rechnungen so nahe gekommen, daß der Fehler bey nicht gar zu grossen Cirkeln, fast unmerklich ist.

wenn man die Verhältniß des Diameters zur Peripherie wie 100 zu 314 annimmt,

man hat innerhalb des Cirkels, wie auch ausserhalb um ihn herum zwey Vielecke beschrieben, deren Sehnen so klein angenommen wurden, als man konnte; zwischen diese beede Vielecke fällt nun natürlicher Weise die Peripherie des Cirkels hinein; sie ist also die mittlere Proportionallinie zwischen dem unmittelbar grössern und kleinern Vieleck. Man hat sie berechnet, und gefunden, daß die Verhältniß des Diameters zur Peripherie bey nahe seye wie 100 zu 314. Dieses Verhältniß muß man nun auswendig behalten, wenn man einen Cirkel berechnen will. Dann es seye der Diameter eines Cirkels 20, so wird man nach den Proportionsregeln sagen müssen;

$$100 : 314 = 20 : \frac{20 \cdot 314}{100},$$

woraus die beynähe wahre Fläche eines Cirkels sich bestimmen läßt.

welches die Peripherie des gesuchten Cirkels in einer geraden Linie bey nahe seyn wird. Wenn ich sie nun mit ein $\frac{1}{2}$, das ist, weil der Diameter 20 = 20, mit $\frac{1}{2}$ multiplicire, so habe ich die Fläche des Cirkels. Ich muß also die Peripherie mit dem vierten Theil des Diameters multipliciren, dann der halbe Radius ist allemal der 4te Theil des Diameters. Es seye der Diameter

a =

$$a = 2r$$

$$\text{so ist } \frac{\frac{1}{2}a = r}{: 2}$$

$$\text{und } \frac{1}{4}a = \frac{r}{2} = \frac{1}{4}a.$$

Man kann
dahero aus
dem Diams-
ter die Peris-
pherie, aus
der Periphe-
rie den Dia-
meter,

Der Ausdruck $\frac{\pi r}{2}$ ist also eben so viel, als $\frac{\pi a}{4}$; wenn a der Diameter ist. Will ich aus der gegebenen Peripherie π den Diameter finden, so setze ich,

$314 : 100 = \pi : \frac{100 \cdot \pi}{314}$, welches Tab. I. der gesuchte Diameter seyn wird. Eben so finde ich einen gegebenen Bogen $z. B. RB$, und sodann den Circelausschnitt (sectorem circuli) RCB , wenn die Periphe-
rie π , der Diameter a und der Bogen $RB = n^\circ$ gesetzt wird. Nun suche ich zu erst die Peripherie, und sage

$100 : 314 = a : \frac{314 \cdot a}{100}$, ferner den Theil der Peripherie RB , oder den Bogen n , durch eine gleiche Verhältniß nach den Graden $\S. 140$; da es dann heißt

$$360^\circ : n^\circ = \frac{314 \cdot a}{100} : \frac{314 \cdot a \cdot n^\circ}{100 \cdot 360}$$

So heißt der in eine gerade Linie verwandelte Bogen RB ; wenn ich ihn nun mit dem vierten Theil des Diameter's multiplizire; so habe ich $\frac{314 \cdot a^2 \cdot n^\circ}{400 \cdot 360}$, welches der Inhalt des flachen Sectors RCB ist.

Hieraus erhellet weiter, daß es eine beständige Per-
bältniß zwischen dem
Quadrat des
Diameters
und der Fläche
des Cirkels, nemlich
1000:785
gebe,

§. 157. Wenn der Diameter 100 ist, so ist sein Quadrat 100.100=1000; und wenn die Peripherie 314' hält, so ist die Fläche des Cirkels $314 \cdot \frac{100}{4} = 7850$; wenn man nemlich wirklich multiplicirt. Folglich verhält sich das Quadrat des Diameters zur Fläche des Cirkels selbst wie 1000 zu 7850; oder

$$1000:785 \quad 100^2: \frac{314 \cdot 100}{4} = 10000:7850, \text{ das ist, wenn man beiderseits mit 10 dividirt:}$$

$$= 1000:785.$$

Nun wollen wir zween Cirkel betrachten, einen grossen und kleinen; die Fläche des einen solle C des andern c heißen: der Diameter des grössern C solle A, des kleinern aber a seyn; so wird seyn

wie die Quadrate ihrer
Diameter.

$$A^2 : C = 1000 : 785$$

$$a^2 : c = 1000 : 785 \quad \text{folglich}$$

$$A^2 : C = a^2 : c, \text{ und durch die Vertauschung der mittlern Glieder}$$

$$A^2 : a^2 = C : c.$$

Das heist in Worten ausgedruckt: Die Flächen der Cirkel verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihre Diameter. Ein lehresatz, den man sich wohl bekannt machen muß; denn er wird im folgenden öfters genuetzt werden.

§. 158. Jetzt kommen wir auf einen höchstwichtigen lehresatz, welchen Pythagoras

goras erfunden, und dafür durch seine Zuhörer ein Dankopfer von hundert Ochsen oder eine Hecatomb demjenigen grossen Gott gebracht hat, der ihm die Gabe verliehen, solche wichtige Entdeckungen zu machen. Eine Ehrerbietung und Verehrtheit, welche von der gelehrten Nachwelt zwar gelobt aber selten nachgeahmet wird. Pythagoras hat die Seite, die in einem rechtwinklichten Dreieck dem rechten Winkel entgegen steht, die Hypothenuße, und die beide übrige Seiten, die den rechten Winkel einschliessen, die Cathetos genannt, und seinen ersten Lehrsatz hernach also ausgedruckt: Das Quadrat der Hypothenuße ist gleich den Quadraten der beiden Cathetorum zusammen genommen. Das ist, nach der Figur: das Quadrat auf der Linie AB , oder $ABDE$ ist gleich den Quadraten auf der Linie AC und CB , oder $ACIK$ und $CBGH$. Das wollen wir jetzt beweisen. Man ziehe die Linien AG und CD ; so wird man bald sehen, daß die Dreiecke ABG und DBC einander gleich sind; wenn man das einmal bewiesen hat, so ist das Fundament zum folgenden ganzen Beweis gelegt, wenn man nur die Parallellinie CF , und die zwei Diagonallinien LD und CG vollends zieht. Nach unserer Bedingung ist also

Vorbereitung zu dem wichtigen Lehrsatz, welchen Pythagoras erfunden hat.

Was die Hypothenuße und was die Catheti in einem rechtwinklichten Dreieck seyen.

Tab. II.
Fig. 33.

Der Lehrsatz selbst nemlich das Quadrat der Hypothenuße ist den beiden Quadraten der Cathetorum gleich,

was uns sündlich erwiesen.

416 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

$m = n$, dann alle Winkel im Quadrat
• sind rechte Winkel §. 152.

$$0 = 0$$

_____ folglich § 9.

$$m + 0 = n + 0, \text{ ferner}$$

$AB = BD$, weil alle Seiten in einem
 $BG = BC$ Quadrat einander gleich
sind;

_____ folglich §. 144. nr. II.
 $\triangle ABG = \triangle DBC$. Ferner §. 156.

$$\triangle DBL = \triangle DBC$$

_____ also
 $\triangle DBL = \triangle ABG$ ferner §. 156.

$$\triangle CBG = \triangle ABG$$

_____ demnach §. 9.
 $\triangle DBL = \triangle CBG$ das ist §. 156.

$$\frac{1}{2} DBLF = \frac{1}{2} CBGH. \text{ Folglich}$$

$$DBLF = CBGH = CB^2; \text{ Eben so beweist}$$

$$ALFE = ACIK = AC^2 \text{ man, daß}$$

_____ folglich
 $DBLF + ALFE = CB^2 + AC^2$ das ist
 $ABDE = CB^2 + AC^2$ oder
 $AB^2 = CB^2 + AC^2.$

Wie man
durch Hülfe
dieses Lehrsatzes
ein Quadrat in zwei
andere, oder umgekehrt
zwei in eins zu
verwandeln
kann;

Das ist nun der Beweis dieses wichtigen
Lehrsatzes, wodurch man in den Stand
gesetzt wird, sogleich ein Quadrat in zwei
andere, oder umgekehrt zwei in eins zu
verwandeln; dann wenn man auf der ge-
gebenen Seite des Quadrats ein recht-
winkliges Dreieck aufrichtet; so wer-
den

den die Quadrate der beeden Seiten dem gegebenen Quadrat gleich seyn; Eben so darf man nur die Seiten zweyer gegebenen Quadrate rechtwinkliche zusammen setzen, und hernach die Hypothenuse ziehen, so wird man die Seite desjenigen Quadrats finden, welches den beeden gegebenen gleich ist. Will man ein Quadrat, das drey andern Quadraten gleich ist, so darf man nur die Operation doppelt machen. Z. E. in der 34. Fig. wenn CA und AB rechtwinkliche zusammen gesetzt werden, so ist $CB^2 = CA^2 + AB^2$; und wenn ich auf CB die Linie DB abermal rechtwinklich setze, so ist $CD^2 = CB^2 + BD^2$. Folglich $CD^2 = CA^2 + AB^2 + BD^2$; Eben so siehet man, daß man eine Menge von Quadraten durch die Wiederholung dieser Operation nach und nach in ein einiges verwandeln könne.

Auf gleiche Weise lassen sich 3, 4 und mehrere Qua-

Tab. II.

Fig. 34.

drate in eines u. s. w. verwandeln.

§. 160. Diß ist aber noch das wenigste, was von der Fruchtbarkeit dieses Lehrsatzes gesagt werden kann. Im folgenden werden sich ungleich wichtigere Wahrheiten daraus herleiten lassen. Gegenwärtig wollen wir nur zeigen, wie man durch Hülfe dieses Lehrsatzes einen Theil vom Eirkel wirklich vollkommen quadriren könne. Hippocrates, ein verunglückter Kaufmann, hat sich zuletzt auf die Mathematik gelegt, und durch die Erfindung, die wir jetzt beschreiben, seine Namen verewiget.

Andere noch weit wichtigere Sätze, welche aus diesem Lehrsatz fließen.

Tab. II.

Fig. 35.

Die Erfindung des Hippocrates

D d

ewiget.

berubet dar- ewiget. Dann das vom Eirkel quadrirte
 auf, nach wel- Theilgen, davon wir jeko reden, heist
 cher sich ein noch heut zu Tag Lunula Hippocratis.
 Stück vom Wenn man zween Eirkel beschreibet, das
 Eirkel, wel- von der eine noch so groß als der andere
 des lunula ist, so wird das Stük $AFBE$, welches
 Hippocratis die Differenz zwischen der Helfte und dem
 heist, voll- vierten Theil der beeden Eirkel ist, der
 kommen qua- halbe Mond des Hippocrates (Lunula Hip-
 driren läst. pocratis) genennt, weil es einem halben
 Mond nicht unähnlich siehet. Man ziehe
 den Diameter AD vom grossen Eirkel, den
 wir C nennen wollen, und beschreibe den
 kleinern Eirkel $AFBA$ so, daß sein Dia-
 meter AB der Seite des in den grössern
 Eirkel einzuschreibenden Quadrats gleich
 werde; welches geometrisch geschehen kann.
 §. 153. Man darf nur in den grossen
 Eirkel ein Quadrat hineinschreiben, und
 die Seite des Quadrats AB zum Diamet-
 er des kleinen Eirkels machen; so ist,
 weil $AB = BD$, nach der Natur des Qua-
 drats, $AD^2 = 2AB^2$ §. 159. folglich,
 wenn der grosse Eirkel C und der kleine
 heisset, $C : c = AD^2 : AB^2$ §. 158.

$$= 2AB^2 : AB^2$$

$$= 2 : 1.$$

Beweis der
 gemeldeten
 Quadratur,
 oder Ver-
 wandlung ei-
 nes Eirkel-
 stük. in ein
 geradelinich-
 tes Dreyeck.

Also der grössere gerade noch einmal so
 groß als der kleinere. Folglich wird die
 Helfte vom kleinen Eirkel gleich seyn dem
 vierten Theil vom grossen; dann weil

$C : c$

$C:c = 2;1$ so ist

$$C = 2c$$

$\frac{C}{4} = \frac{2c}{4}$: 4 folglich

$$\frac{C}{4} = \frac{2c}{4} \quad \text{das ist}$$

$\frac{1}{4}C = \frac{1}{2}c$. Nun ist in der Figur

$AFBA = \frac{1}{2}c$, und der Quadrant

$AEBC = \frac{1}{4}C$. Folglich

$AFBA = AEBC$. Es ist ferner §. 9.

$AEBA = AEBA$.

$AFBA - AEBA = AEBC - AEBA$. Nun ist

$\triangle ABC = AEBC - AEBA$. Wie man aus der

Figur nothwendig
einsiehet.

Folglich

$AFBA - AEBA = \triangle ABC$. Das ist in der Figur

$AFBA - AEBA = AFBE$, folglich

$AFBE = \triangle ABC$.

Also läßt sich der Mond, wenn er gerade
so aussiehet, vollkommen quadriren, weil
man ihn in ein Dreieck geometrisch ver-
wandeln kann, ein Dreieck sich aber voll-
kommen quadriren oder ausmessen läßt;
dann quadriren heißt nichts anders, als
die Fläche einer Figur in ein Quadrat ver-
wandeln. Dem ungeachtet hat man doch
für die Quadratur des Kreises noch nichts
gewonnen, weil das Mondförmige Stück
kein in zweyerley Bogen von zween verschie-
denen Kreisen eingeschlossen ist. Dann
man weiß nicht, der wievielte Theil das
Stück $AFBE$ von dem ganzen Kreis seye,
Hätte also Hippocrates das Stück $AFBA$

Was quadri-
ren hier heißt
§;

Ob 2

oder des Hippoc

eratischen
Erfindung
noch nicht
quadrirt
werden könne, oder ein weit kleineres noch, wenn es nur
unten durch eine Sehne oder gerade Linie
geschlossen wäre, quadrirt, so würde man
den ganzen Cirkel quadriren und ihm die
Quadratur desselben danken können. Die
Hippocratische Erfindung ist also übrigens
von keinem sonderlichen Nutzen. Weil
sie aber viel witziges in sich begreift, so ha-
ben wir sie nicht ganz übergehen wol-
len.

Von der Nut-
barkeit des
Pythagori-
schen Lehrsatzes bey dem
Begriff der
Ähnlichkeit,
oder bey den
Verhältniß-
sen ähnlicher
Figuren;

und zwar vor-
nehmlich bey
Erfindung
der mittlern
Proportio-
nallinie zwi-
schen zwey ge-
gebenen Li-
nien.

Tab. II.

Fig. 40.

Eine jede auf
dem Diams-
ter des Cir-
kels aufger-
richtete und
in der Peri-
pherie sich
endeckende

§. 161. Die Nutzbarkeit des Pytha-
gorischen Lehrsatzes wird sich vorzüglich be-
weisen, wenn wir den Begriff der Ähn-
lichkeit der geometrischen Figuren vollends
erklärt haben werden. Wir können ihn
aber, wie Euclides uns dinstalls vorgegan-
gen, auf den Begriff der Gleichheit rebu-
ciren. Wir wollen mit der manchen so
schwer scheinenden Aufgabe die mittlere
Proportionallinie zwischen zwey gegebenen
Linien zu suchen, den Anfang machen. Nach
dem pythagorischen Lehrsatz ist in der 34-Fig.

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 \text{ folglich, da}$$

$$DC^2 = DC^2$$

$$EC^2 - DC^2 = ED^2$$

wenn nun EC gesetzt wird = r

$$CD = a$$

$$DE = x$$

so ist nach obigem Ausdruck $r^2 - a^2 = x^2$

$$\text{und } \sqrt{r^2 - a^2} = x = DE$$

Da aber auch $AC = EC = r$, weil
AC, EC und CB Radii sind, so wird seyn
AC

$AC - CD = r - a$ und $CB + CD = r + a$ perpendicularis
 das ist, $AD = r - a$ und $DB = r + a$; nie ist die
 wie die Figur von selbst anweist. Nun mittlere Pro-
 ist $r^2 - a^2 = (r - a) \cdot (r + a)$ §. 60. portionaliti-
 folgl. ist $r - a : \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - a^2} : r + a$ §. 78. 80. nie zwischen
 Das ist in der Figur $AD : DE = DE : DB$. den Segmen-
 Dann wenn ich die mittlere und äußerste meters, wel-
 Glieder wiederum multiplicire, so habe che sie ab-
 $(r - a) \cdot (r + a) = \sqrt{r^2 - a^2} \cdot \sqrt{r^2 - a^2}$ schneidet;
 $= r^2 - a^2$, weil eine jede Wurzel, mit wird um-
 sich selbst multiplicirt, ihr Quadrat gibt; ständlich aus,
 so ist $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ dem Vorba-
 $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = x^2$ u. s. w. Demnach ist die gorischen
 Proportion richtig; $AD : DE = DE : DB$. Lehrsatz ers-
 Wenn also auf dem Diameter eines Cir- wiesen und
 kels eine Perpendicularlinie bis an die Per- erläutert.
 ripherie hin aufgerichtet wird, so wird sie

allemal die mittlere Proportionallinie zwis-
 schen den beeden durch sie gemachten Ab-
 schnitten oder Segmenten des Diameters, **Große**
 und zugleich die Quadratwurzel aus dem, **Fruchtbar-**
 Product dieser zwey Segmenten seyn. Die **keit dieses**
 Lehrsatz ist einer der allerfruchtbarsten **Satzes.**
 In der ganzen Geometrie; wir wollen nur
 eines der leichtesten und faßlichsten Exem-
 gel geben. Man weiß aus dem ersten
 Theil, wie schwer es seye, die Quadrat-
 wurzeln aus Irrationalgrößen zu finden, **Wie man**
 und wie man aller Mühe ungeachtet doch **durch denselb-**
 nicht so weit durch die Approximation es **igen alle**
 bringen könne, daß man sagen dürfte, nun
 habe man die Wurzel ganz genau und rich-
 tig.

Quadrat- tig. Hingegen in der Geometrie lassen
 variirt auch sich die Quadratwurzeln aus allen nur
 aus so ge- denkbaren Irrationalgrößen ausziehen.
 kannten Ir- Dann man darf nur eine Zahl in zwey
 rational- Factores theilen, welches allemal gesche-
 größen ges- hen kann, wenn der eine Factor Eins, und
 metrisch und der andere die gegebene Zahl ist, und hers-
 aufs genaue- nach die beide Factores durch Linien aus-
 drücken, deren Summe den Diameter des
 Kreis- Cirkels bestimmen wird, wenn sie schnurs-
 gerade zusammen gesetzt werden. Die aus
 dem Punkt der Zusammensetzung bis an
 die Peripherie gezogene Perpendicularität
 geben könne. nie wird die Quadratwurzel seyn. 3. E.

$2 = 1.2$, $3 = 1.3$, $5 = 1.5$ u. s. w.
 wenn also $AD = 1$ und $DB = 2$, so ist
 $DE = \sqrt{2}$; ist $DB = 3$ so ist $DE = \sqrt{3}$,
 ist $DB = 5$, so ist $DE = \sqrt{5}$ u. s. w. Dann
 $AD : DE : DE : DB$

Erklärung das ist $1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$

und Beweis. $1 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3$

$1 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 5$ u. s. w.

Dann die Producte der mittlern und auß-
 ersten Glieder sind einander gleich.

Und $DE^2 = AD \cdot DB$ das ist

$$2 = 1 \cdot 2$$

oder $3 = 1 \cdot 3$

oder $5 = 1 \cdot 5$ folglich auch

$$\sqrt{DE^2} = DE = \sqrt{AD \cdot DB} \text{ das ist}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{1 \cdot 3}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{1 \cdot 5}$$

Da nun $\sqrt{DE^2} = DE$, folglich genau durch die Linie DE ausgedruckt wird, so siehet man, daß man eine jede Quadratzurzel geometrisch aufs genaueste finden können. Weil ferner diese Eigenschaft als in einem jeden rechtwinklichten Dreueck, wenn von der Spitze des rechten Winkels E auf die Hypothenuse AD eine Perpendicularlinie EB herabgefället wird, die Verhältniß statt finden, welche heißt: $AB:BE = BE:BD$; dann man kann durch die drey Punkte A, E, D nicht nur bekann- ter massen einen Cirkelbogen überhaupt, sondern auch, weil bey E ein rechter Winkel, gerade einen solchen Cirkelbogen beschreiben, dessen Sehne AD der Diameter wird, folglich wird durch ein rechtwinklichtes Dreueck allemal ein halber Cirkel bestimmt, und die obige Proportion wird bey allen rechtwinklichten Dreuecken unter der gemeldten Bedingung, daß EB auf AD perpendicular gefället werde, statt finden.

§. 162. Es sind noch zwey Fälle übrig, welche die Proportionen der Linien in den geradelinichten Dreuecken bestimmen. Der Beweis davon wird sich leicht geben, wenn wir zuvor unsern Lesern gezeigt haben, daß zwey Parallelogramma sich zu einander verhalten wie ihre Grundlinien, wenn

In einem jeden rechtwinklichten Dreueck ist der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällete Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den durch abgeschnittenen Segmenten der Hypothenuse.

In einem jeden rechtwinklichten Dreueck ist der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällete Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den durch abgeschnittenen Segmenten der Hypothenuse.

Tab. II. Fig. 40.

Parallelogramm
von gleicher
Tab. II.

Fig. 36.
Wenn Höhen
sich verhalten
wie die
Grundlinien
und umge-
kehrt, wie die
Höhen, wenn
die Grundli-
nien gleich
sind.

wenn sie gleiche Höhen haben, oder wie ihre Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind. Das Rectangulum $FABE$ ist in seinem Inhalt $AB \cdot BE$, und das Rectangulum $EBCD$ ist $BC \cdot BE$. Da man nun den Inhalt einer Fläche allemal für die Fläche selbst sehen darf, so ist

$$FABE : EBCD = AB \cdot BE : BC \cdot BE$$

oder noch deutlicher

$$AB \cdot BE : BC \cdot BE = AB : BC$$

das ist nach

$$\S. 80. \text{ nr. VI. } AB \cdot BE : BC \cdot BE = AB : BC$$

Da nun AB und BC die Grundlinien sind, so verhalten sich zwey Rectangula von gleichen Höhen wie die Grundlinien. Wie sich aber die ganze Rectangula zu einander verhalten, so verhalten sich auch ihre Hälften; oder nach $\S. 80. \text{ nr. VI.}$

weil $AB \cdot BE : BC \cdot BE = AB : BE$, so ist

$$\text{auch } \frac{AB \cdot BE}{2} : \frac{BC \cdot BE}{2} = AB : BE,$$

Folglich sind
alle Dreyecke
von einerley
Grundlinie
wie ihre Höhen,
und die
von einerley
Höhen, wie
ihre Grund-
linien.

Da nun diese Hälften rechtwinklichte Dreyecke sind, so verhalten sich auch diese zu einander, wie ihre Grundlinien, wenn sie einerley Höhen haben. Und weil alle Parallelogramma in Rectangula verwandelt werden können, so ist die Verhältniß allgemein; daher nicht nur alle Parallelogramma, sondern auch ihre Hälften, das ist, alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke sich verhalten wie ihre Grundlinien, wenn sie einerley Höhe haben, und wie ihre Höhen, wenn sie einerley Grundlinien haben.

§. 163. Nun können wir leicht die Anwendung auf die noch zweien übrigen Fälle dieser Sätze der Proportionen bey den Dreyecken machen. Man ziehe in einem Dreyeck ACB auf die Proportion der Grundlinie AB in einer beliebigen portion der Zwischenweite die Parallellinie DE , und vereinige hernach die Punkte D und E wie Linien im auch E und A durch die Linie DB und AE , ähnlichen so werden sich zwey gleiche Dreyecke DAB Dreyeck. und DBE ergeben; weil sie einerley Grundlinie DE , und, da sie zwischen einerley Tab. II. Parallellinien stehen, auch einerley Höhe Fig. 37.38. haben. §. 162. Folglich wird sich die Proportion von selbst geben:

$$\triangle CDE : \triangle ADE = CD : DA$$

$$\triangle CDE : \triangle DEB = CE : EB$$

$$\triangle ADE$$

$$CD : DA = CE : EB.$$

die Proportion der Linien zu einander

Wenn man nun die Verhältnisse und Veränderungen nach §. 80. hier anbringt, so gibt es folgende Proportionen, welche alle aus der schon gefundenen sich herleiten lassen. Dann wenn man die mittlere Glieder verwechselt, nach §. 80. nr. I. so hat man $CD : CE = DA : EB$ besonders ferner durch die Addition: §. 80. nr. IV.

$$CD + DA : DA = CE + EB : EB \text{ das ist}$$

$$\text{in der Figur: } CA : DA = CB : EB.$$

und wiederum

$$\text{§. 80. nr. IV. } CD : CD + DA = CE : CE + EB, \text{ das ist}$$

$$\text{in der Figur } CD : CA = CE : CB; \text{ folglich}$$

auch nach

$$\text{§. 80. nr. II. } CA : CD = CB : CE.$$

Da §

Wie

Wie zweiffeln keineswegs, daß unsere Leser diese Rechnung verstehen werden, wenn sie nur die Lehre von den Proportionen, welche, wie wir schon gesagt haben, gleichsam die Seele der mathematischen Wissenschaften ist, noch inne haben, oder wenigstens an dieselbe zurückdenken mögen.

Zweiter Fall,
die Propor-
tion der Li-
nien zu fin-
den.

Tab. II.
Fig. 38.

§. 164. Es ist noch ein Fall übrig, dessen Betrachtung uns zu einer neuen Satz-
nung von Proportionen führen wird. Man
nehme die Linie CA wiederum für die Gruns-
linie, und ziehe in Gedanken durch den
Punkt B eine Parallellinie mit AC , so
werden die Dreiecke DAB und CDB ,
einerley Höhe haben; folglich wird seyn:

$$\triangle DAB : \triangle CDB = DA : DC \quad \S. 162.$$

$$\triangle DBE : \triangle CDE = DA : DC \quad \S. 163.$$

$$\triangle DAE$$

folglich

$$\triangle DAB : \triangle CDB = \triangle DBE : \triangle CDE \quad \text{und nach}$$

§. 80. nr. IV.

$$DAB + CDB : CDB = DBE + CDE : CDE; \text{ d. i.}$$

in der Figur:

$$\triangle CAB : \triangle CDB = \triangle CDB : \triangle CDE. \quad \text{Man ist}$$

$$\triangle CAB : \triangle CDB = AB : DE \quad \S. 162. \text{ folglich}$$

$$\triangle CDB : \triangle CDE = AB : DE \quad \text{und weil auch}$$

$$\triangle CDB : \triangle CDE = CB : CE \quad \S. 162. \text{ so ist}$$

$$CB : CE = AB : DE \quad \text{oder } \S. 80. \text{ nr. I.}$$

$$CB : AB = CE : DE, \quad \text{nr. II. } \S. 80.$$

$$CE : DE = CB : AB.$$

Eben so beweist man auch, daß

$$CD : DE = CA : AB. \quad \text{Dann weil wir bereits}$$

bewiesen haben, daß

$$CB : CE = AB : DE \quad \text{und}$$

$$CB : CE = CA : CD$$

§. 163. so ist

$$CA : CD = AB : DE$$

oder §. 80.

$$CA : AB = CD : DE$$

und

und wenn man die Proportion umkehrt:
§. 80. nr. II.

$$CD : DE = CA : AB.$$

Doch man siehet von selbst leicht ein, daß ^{Warum die} alle §. 80. beschriebene Veränderungen ^{gegebene Ver-} hier vorkommen können, dahers wie uns ^{weise eine} setzen lehren das schon gesagte nicht zwey ^{besondere} und vorzüg-
mal sagen wollen. Uebrigens habe die ^{liche Deut-} liche Deut-
sichkeit des
sen bloß geometrischen Beweis schon in den.

meinen Amoenit. Acad. Fasc. II. vorges-
tragen, und daselbst gezeigt, daß es je
und je für Anfänger besser und tauglicher
sey, wenn man aus den angeführten
Gründen den Beweis führet, als wenn
man den Begriff der Aehnlichkeit allein zu
Hülfe nimmt. Wir wollen aber jezo die
ganze Lehre auch aus der Natur der Aehn-
lichkeit erläutern.

§. 165. Man siehet leicht, daß die Tab. II,
zwo Dreyecke CDE und CAB einander fig. 38.
ähnlich seyen. Dann sie sind in nichts 39.
von einander unterschieden als in der Grö- Wie man
ße, und wenn ich das kleinere Dreyeck eben diese
 CDE durch ein Vergrößerungsglas anse- Proportio-
he, so wird es nach und nach dem Dren- nen aus dem
eck CAB congruent erscheinen. §. 10. Begriff der
Aehnlichkeit
Nun fragt man billig, ob man keine na- könne:
here Gründe von der Aehnlichkeit der und was ähn-
Dreyecke zu urtheilen, vorbringen könne. liche Dreyecke
seyen;
Dann das, was wir bisher sagten, ist woraus man
eben nach dem Gesicht geschlossen; man erkenne, daß
siehet es ja, daß die zwey Dreyecke ein dem andern
ander ähnlich seyen.

ander ähnlich seyn. Warum sie aber einander ähnlich seyen, kann man jezo noch nicht so deutlich wissen. Allein wenn wir bedenken, daß ein Dreyeck durch die Neigung seiner drey Seiten gegeneinander bestimmt werde, so gehet uns schon ein näheres Licht auf; dann wenn die Neigung der Seiten gegeneinander gleich ist, so werden die Dreyecke einander ähnlich seyn, ihre Seiten mögen groß oder klein werden, weil in diesem Fall nichts ausser der Grösse gedacht werden kann, wodurch man zwey Dreyecke unterscheiden könnte. Das ist aber der Begriff der Ähnlichkeit §. 10. folglich sind zwey Dreyecke einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben; und diese Gleichheit der Winkel folgt unmittelbar aus den bereits von uns erwiesenen Proportionen der Seiten. Dann weil die Linie DE mit AB parallel seyn muß, wenn die Proportionen statt haben sollen, so ist der Winkel $n = m$ und $r = s$, wie aus der Eigenschaft der Wechselwinkel erhellet, §. 146. Der Winkel o ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Folglich sind alle drey Winkel einander gleich; ja man hat nicht einmal nöthig, von allen drey Winkeln diese Gleichheit zu beweisen; dann wenn nur zwey Winkel in zweyen Dreyecken einander gleich sind, so muß der dritte in einem, auch dem dritten im andern Dreyeck

Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben; Tab. II. fig. 39.

Diese Eigenschaft der ähnlichen Dreyecke fließt aus dem obigen Beweis §. 163.

Wenn in zwey Dreyecken nur zwey Winkel einander

es gleich seyn. Die Winkel seyen m und n ähnlich sind, s in einem, und im andern Dreieck n so sind die und r , so wird der dritte Winkel, weil Dreiecke ein-
die Summe aller drey Winkel 180° macht, ander ähn-
nothwendig seyn $= 180^\circ - (m + s)$ im lich, weil in
einen, und im andern $= 180^\circ - (n + r)$. diesem Fall
Diese zween Ausdrücke werden nun ein- der dritte
ander gleich seyn, wenn $r = s$ und $m = n$; Winkel vor-
folglich auch $r + n = s + m$; dann ten gleich
seyn muß;
Beweis,

$$180 = 180$$

$$r + n = s + m$$

$$180 - (r + n) = 180 - (s + m).$$

Das ist aber der dritte Winkel; Er wird also durch die Gleichheit zweier Winkel von selbst bestimmt; und man kann sagen, daß wenn zween Winkel in zween Dreiecken einander gleich seyn, auch der dritte dem dritten gleich seye. Die Seiten, welche gleichen Winkeln entgegen gesetzt werden, sind hernach proportionell. Man heißt sie deßwegen gleichnamigte Seiten, (*latera homologa*). Wenn man also von zween Dreiecken, sie mögen stehen, wo sie wollen, bewiesen hat, daß zwey Winkel im einen zweyen im andern gleich seyen, so werden ihre Seiten alle diejes nige Verhältnisse haben, die wir §. 163. 164. vorgetragen; folglich werden auch alle Veränderungen, davon wir §. 80. gehandelt haben, sich dabey anbringen lassen. Die ganze Kunst besteht darin, daß

Das gleiche
namigte
Seiten und
Winkel
seyn,

und wie da-
 bers eine
 gleichnah-
 mierte Seite
 proportionell
 fene, welches
 man bey Ge-
 zung der Ver-
 hältnisse
 wohlzumer-
 ken hat.

daß man die erste Verhältniß recht setzt,
 und allemal gleichnamigte Seiten in ei-
 nem wie in dem andern Dreueck einander
 correspondiren läßt, Z. E. ich setze die
 einfache Verhältniß $CD : CE$; was für
 zwey Linien muß ich im größern Dreueck
 dazu nehmen, daß eine Proportion her-
 auskomme? weil CD dem Winkel r ent-
 gegen steht, so wird die gleichnamigte
 Seite CA heißen, als welche dem Win-
 kel $s = r$ entgegen steht; folglich heißt das
 dritte Glied CA ; und weil CE dem Win-
 kel n entgegen steht, so heißt die gleich-
 namigte Seite im grossen Dreueck CB ,
 dann sie steht dem Winkel $m = n$ entgegen.

Tab. II.
 Fig. 40.

Anwendung
 der Sätze von
 der Aehnlich-
 keit auf die
 oben §. 163.
 bestimmte
 Fälle;

Eben so kann man zeigen, daß in der
 Fig. 40, die drey Triangel oder Dreuecke
 AED , AEB , und BED einander ähnlich
 seyen. Dann

$$o + x = 90^\circ$$

$$m = 90^\circ$$

$$o + x = m$$

$r = r$ folglich, auch der dritten
 das ist $o = s$ dem dritten,

$$\triangle AED \sim \triangle AEB.$$

ferner weil $m = n$ wegen der Perpendicular-
 Linie EB

und $o = s$ so ist auch der dritte Winkel
 $r = x$ dem dritten gleich, das ist

$$\text{folglich } \triangle AEB \sim \triangle BED$$

und weil $\triangle AEB \sim \triangle AED$, so ist §. 9. auch
 $\triangle BED \sim \triangle AED$;

als

also sind alle drey einander ähnlich, und wo diese Aehnlichkeit statt findet, da sind die gleichnamigte Seiten proportionell. Anfänger können sich die Sache deutlicher machen, wenn sie von Chartenpapier oder Papendeckel solche Dreyecke, dergleichen in der 40. Figur stehen, ausschneiden, und sodann die gleiche Winkel auf einander legen, in welchem Fall sie den ganzen Beweis der Einbildungskraft vor die Augen hinhahlen, und ihre Figur auf die 39. und 38. Figur reduciren können. Uebrigens siehet man nun auch die Ursache ein, woher es komme, daß man zur Bestimmung eines Dreyecks allemal wenigstens eine Seite unter den drey bestimmenden Theilen nöthig habe, und warum die Aufgabe noch unbestimmt seye, wenn einem blos drey Winkel gegeben werden. Dann aus drey gegebenen Winkeln, deren Summe zusammen gerade 180° machen muß, kann man eine Menge von Dreyecken machen, welche alle zwar einander ähnlich, nicht aber auch gleich, oder congruent, folglich noch unbestimmt sind.

Wie sich Anfänger die Sache noch deutlicher vorbilden können.

Warum aus drey gegebenen Winkeln kein Dreyeck vollkommen bestimmt werden kann, und was allemal wenigstens eine Seite dazu nöthig habe.

§. 166. Jetzt haben wir alles gesagt, was zur Theorie bey den Grundlinien und Flächen nebst ihren Verhältnissen gehört. Einige wenige Aufgaben dürfen wir nicht ganz mit Stillschweigen übergehen. Die leichteste ist die auf die Geometrie

Anwendung der Regel der Regel

Einzelnen

metrie angewandte Regel Detri. Dann man kann in der Geometrie aus drey gegebenen Linien die vierte so gut finden, und wie man aus drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie finde, als man in der Arithmetik aus drey Zahlen die vierte Proportionalzahl finden kann. 3. E. man solle zu den Linien CD , DE , und CA die vierte Proportionallinie finden. In diesem Fall darf man nur die Linie DE unter einem beliebigen Winkel auf CD setzen, sodann CD bis A verlängern, damit man CA bekomme; hernach mit DE aus dem Punkt A die Parallellinie AB ziehen, welche die durch die Punkte C und E zu ziehende Linie CB bestimmen wird. Dann es verhält sich, so

$$CD : DE = CA : AB ;$$

folglich ist AB , wie in der Arithmetik,

$$= \frac{CA \cdot DE}{CD}, \text{ d. i. wenn man das}$$

Product der zweyten und dritten Linie mit der ersten dividirt, so hat man die vierte Proportionallinie. Diese Aufgabe kann man noch auf verschiedene Weise auflösen. Uns aber genüget, eine einige Methode für die Ausübung angeführt zu haben. Wie man die mittlere Proportionallinie finde, haben wir S. 161. gezeigt. Eben so begreifen unsere Leser

Wie man aus dem hiebert, gen die Art und Weise, erlerne, einen verhängten

von selbst, wie man auch durch Hülfen ähnlicher Dreyecke einen sogenannten verjüngten Maasstab machen könne; weiler aber zur anwendenden Mathematik gehört,

gehört, so halten wir uns nicht weiter damit auf. Wer einmal einen gesehen hat, der wird sich leicht erinnern, daß durch die Parallellinien so viel ähnliche Dreiecke bey der ersten Abtheilung abgeschnitten werden, als Parallellinien gezogen wurden. Dahero sich die Zolle und Linien von selbst geben, wenn man eine Länge abmessen will. Will man eine geradelinichte Fläche ausmessen und in gleiche Theile eintheilen, so verwandelt man sie durch die zuziehende Diagonallinien zuerst in Dreiecke, die man ausmisst, und deren Summe dem ganzen Inhalt gleich ist; diesen Inhalt dividirt man mit der Zahl der Theile, in welche die Fläche getheilt werden solle, und sucht hernach aus dem Inhalt die Theile selbst, durch die Addition oder Subtraction eines Dreiecks zu dem ersten Dreieck in der Figur; je nachdem es kleiner oder größer ist, als der gesuchte Theil; und fährt so, dann mit dieser Operation so lange fort, bis man die Theile alle bekommt. Will man eine Fläche auf dem Felde ins kleine bringen, so darf man nur einen Punkt Cannehmen, und die Linien CD , CE , CF , CG , CH , ziehen; sodann nach Belieben, je nachdem man die Figur kleiner oder größer haben will, die mit dem äußersten Umfang parallel zuziehende Linien de , ef , fg , gh , hd beschreiben; in

Maastab zu

machen, wels

ches aber in

die practische

Geometrie

gehört,

Wie alle

band Flächen

im Felde vers

theilet wer

den können,

Tab. III.

Fig. 41.

Wie man es

ne größere

Figur ins

kleine brin

gen und vers

tungen solle,

welchem Fall die Figur $defgh$ der größern $DEFGH$ vollkommen ähnlich seyn

Wie hieraus wird, weil sich nach §. 164. verhalten
 aßermal ein $Cd:de:CD:DE$, $Ce:ef=CE:EF$; u. s. w.
 neuer Grund hieraus erhellet noch ein neuer Grund,
 erhellte, war, warum alle Eirkel einander ähnlich seyen.
 um alle Eir, Dann ich kann den Eirkel als ein Poly-
 kel einander ähnlich, folg, gon von unendlich viel Seiten betrachten;
 ähnlich, folg, ich die Peri, wenn ich nun aus dem Mittelpunkt C
 ich die Peri, wenn ich nun aus dem Mittelpunkt C
 pherien ei, merley Ber, an alle Ecke des Polygons Radios, und
 nerley Ber, hältniß zu ih, mit den unendlich kleinen Seiten in be-
 hältniß zu ih, ren Diamo, liebiger Distanz Parallelseiten ziehe, so
 ren Diamo, tern haben. wird die Summe aller dieser Seiten einen
 tern haben. u. s. w.

so gut ähnlich ist, als die Figur $defgh$ der Figur $DEFGH$ ähnlich ist.

Einige sogenannte allgemeine, §. 167. Weil wir oben versprochen
 brauche, wie, haben, auch noch zu zeigen, wie die Sei-
 wohl nicht te der regulären Polygone gefunden wer-
 schwerere den, die sich in den Eirkel hineinschreiben
 Aufgaben, lassen; so wollen wir von dieser Mater-
 als die bishe, rie noch etwas sagen. Das Sechs- und
 rige waren, Viereck wissen wir schon. Wie findet
 werden an, man aber die übrige? Wir versuchen es
 geführt.

zuerst mit der Seite des gleichseitigen Dreuecks, welche man aus dem gegebenen Radius oder der Seite des Sechsecks

Wie man die findet. Es seye der Radius $DC=CB$
 Seite des in $=DB=r$, so ist $DF=\frac{1}{2}r$, weil bey F
 Tab. IV. rechte Winkel sind, folglich durch die
 Fig. 61. Perpendicularlinie BF die Grundlinie DC
 den Eirkel in dem gleichseitigen Dreueck in zwey
 einschrei, glei

gleiche Theile getheilet wird. Die gesuchte Seite des Dreiecks, nemlich die Seiten oder Seite AB seye x , so ist nach §. 151. $BF = \frac{1}{2}x$; weil bey F rechte Winkel sind, und die verlängerte Linie DC durch den Mittelpunkt des Circels geht. Da nun

$$DB^2 - DF^2 = FB^2 \quad \text{§. 160.}$$

$$\text{oder } r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{das ist } \frac{3}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{so ist}$$

$$3r^2 = x^2 \quad \text{folglich}$$

$$3r : x = x : r;$$

demnach ist die gesuchte Seite des Dreiecks die mittlere Proportionallinie zwischen dem dreysfachen und einfachen Radius des Circels, welche sich nach §. 161. geometrisch finden läßt; oder auch $x = r\sqrt{3}$; in welchem letztern Fall man die Quadratwurzel aus dreyn durch die Approximation suchen und sie hernach mit dem Radio multipliciren muß. Will man die Seite des regulären Achtecks ferner, wie wissen, so darf man nur die Radios AC und CB unter einem rechten Winkel aus dem Mittelpunkt C ziehen, sodann die Punkte B und A , durch die Linie BA , welche die Seite des Vierecks ist, vereinigen, und endlich AB durch die Linie DC in zwey gleiche Theile theilen, da dann DB die Seite des regulären Achtecks seyn wird. Dann wenn wir $AC = BC$ wie oben r nennen; so ist

Tab. IV.
Fig. 62.

Ge 2

AB

436 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

$$AB = \sqrt{2r^2}$$

$$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2r^2} = \sqrt{\frac{1}{2}r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}r$$

$$EC = \sqrt{(BC^2 - BE^2)} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{2}r^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}r$$

$$DE = DC - EC = r - \frac{1}{2}\sqrt{2}r, \text{ folglich}$$

$$DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{\frac{1}{2}r^2} + \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2 - 2r\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$$

$$BE^2 = \frac{1}{2}r^2$$

$$DB^2 = DE^2 + BE^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$$

$$DB = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{\frac{1}{2}r^2})}$$

Dieses ist die Seite des Achteckes; auf gleiche Weise bemühet man sich, die Seiten der übrigen Polygone zu suchen; da es dann freylich oft beschwerliche Rechnungen geben muß. Wir halten aber unsere Leser nicht weiter damit auf, weil sie aus dem bisherigen schon den Schluß auf ähnliche Rechnungen machen können; und weil es überhaupt keine allgemeine Regel für die Polygone gibt, und die sogenannte Renalbinische Regel, nach den von mehreren schon gegebenen Beweisen, eine wirklich falsche Regel ist.

§. 168. Wir wollen, ehe wir zur Stereometrie kommen, noch einige Aufgaben anführen. Die Alten haben sich auf die sogenannte lineam divinam nicht wenig eingebildet. Es ist daher der Mühe werth, daß wir sie erklären. Wenn man in einer gegebenen geraden Linie denselben Punkt findet, durch welchen die Linie so zerschnitten wird, daß das Quadrat des größern Stückes dem Product aus

aus dem kleinern Stücke in die gegebene ganze Linie gleich ist, so hat man diese göttliche Linie erfunden. Es seye demnach die gegebene Linie AC , man versuche und langt den Punkt B zu wissen, damit her nach $BC^2 = AC \cdot AB$ werde. Die Linie AC wollen wir a nennen; BC die gesuchte Linie soll x heißen: folglich wird AB seyn $a - x$. Da nun seyn solle

Tab. IV.
Fig. 63.

könne.

$BC^2 = AC \cdot AB$, das ist
 $x^2 = a \cdot (a - x) = a^2 - ax$, so suchen wir x , und setzen nach der Bedingung

$$x^2 = a^2 - ax, \text{ folglich ist}$$

$$x^2 + ax = a^2 \text{ und weil}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \text{ nach §.}$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \text{ folglich}$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} \text{ und}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

wenn man nun $CE = AC$ rechtwinklicht auf AC setzt, und sodann $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$ macht, so ist,

$$\text{weil } DE^2 = CE^2 + CD^2 \\ = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Beschreibet man nun mit DE aus dem Punkt D den Bogen EB , so ist

$$BD = DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$\text{und } BD - CD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Da nun $BD - CD = CB$, wie aus der Figur erhellet, so ist CB die gesuchte Linie,

Es 3

und

438 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

und B der Punkt, in welchem die Linie geschnitten werden muß; wenn sie die verlangte Beschaffenheit haben solle. Es
 Von einigen andern Aufgaben, z. E. gibt noch verschiedene andere Aufgaben; wie man aus der gegebenen Grundlinie und der Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyscks seine Höhe finden. Der Inhalt eines rechtwinklichten Dreyscks seine Höhe finde, u. s. w.

3. E. man solle aus dem gegebenen Inhalt und der Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyscks seine Höhe finden. Der Inhalt seye a^2 und die halbe Grundlinie b ; die ganze Kunst bestehet nunmehr darinnen, daß man für den Inhalt einen andern Ausdruck findet; in welchem die Höhe, die wir y nennen wollen; angemerkt wird. Weil nun ein jedes Dreysck das halbe Product der Grundlinie in die Höhe zu seinem Inhalt hat; so wird auch

$$by = a^2 \quad \text{und}$$

$$y = \frac{a^2}{b}$$

Wenn man also den gegebenen Inhalt durch die halbe Grundlinie dividirt, so hat man die Höhe. Dergleichen Aufgaben gibt es die Menge; und es ist fein, wenn man seinen Witz dabey übet; unsere Sache aber ist es dimalen nicht, gegenwärtige Blätter mit vielen Aufgaben zu vermehren. Eine führen wir noch in Rücksicht auf die krumme Linien an; man verlangt zu

Eine Aufgabe in Rücksicht auf die krumme Linien

zu wissen, unter was für einem Winkel sich diejenige Cirkel schneiden, deren Diameter an ihren beeden Enden aufeinander perpendicular stehen; wir werden bald hören, daß sie alle einander unter rechten Winkeln schneiden; oder daß der Winkel $o + n$, unter welchem der Cirkel ADE den Cirkel ADF schneidet, allemal ein Winkel von 90° ist. Man ziehet nur aus den beederseitigen Mittelpunkten B und C die Radios BD und CD in den Punkt des Durchschnittes D ; so hat man, weil $BD = BA$, und $CD = CA$, zwei gleichschenklige Dreiecke ABD und ACD , wenn nemlich die Linie AD gezogen wird; demnach ist

$$\begin{array}{r} x = o \\ x = n \\ \hline x + y = o + n \\ x + y = 90^\circ \text{ nach der Bedingung, folglich} \\ \hline o + n = 90 \end{array}$$

Also schneiden sich alle mögliche Cirkel von dieser Gattung jedesmal unter einem rechten Winkel. Doch genug von diesem. Es ist die Körperlehre noch übrig, davon wir zum Beschluß dieses Capitels vollends reden müssen.

§. 169. Man kann nicht nur Linien und Flächen, sondern auch Körper ausmessen; und diese Kunst heißt man die Stereometrie, welche sich mit der Länge, Breite und Höhe der Körper befaßt.

Breite und Höhe zugleich beschäftigt. Wie man zu dem Maas der Linien, Linien, und zu dem Maas der Flächen, Flächen gebraucht, so gebraucht man zu dem Maas der Körper wieder Körper. Es ist nur die Frage, was man für einen Körper, einen runden, oder eckigten u.

Warum sich s. w. dazu nehmen solle? In folgenden werden wir hören, daß sich der viereckigte, welcher gleich lang, breit und hoch ist, am besten dazu schicke, wie man aus gleichem Grunde zu dem Flächenmaas das Quadrat erwählet hat. Ein solcher Körper heißt ein Cubus; ist er einen Schuh lang, breit und hoch, so heißt er ein Cubischschuh, ist er aber nur einen Zoll lang,

das Cubische, breit und hoch, so wird er ein Cubiczoll genannt; und wenn er endlich eine Ruthe lang, breit und hoch ist, so bekommt er den Nahmen einer Cubicruthe. Jetzt darf man billig fragen, wie sich dann Cubiczolle, Schuhe und Ruthen gegeneinander verhalten, oder wie viel Cubiczoll auf einen Cubischschuh und wie viel Cubischschuhe auf eine Cubicruthe gehen? Wir

Wie man einen vollkommenen Tab. III. Fig. 42. einen Cubus ausmesse; wollen umständlich darauf antworten, wenn wir gezeigt haben, wie man einen Cubus ausmesse. - Die 42. Fig. zeigt einen vollkommenen Cubus. Seine Länge solle 3' seine Breite 3' und seine Höhe 3' seyn; folglich lassen sich auf die unterste Fläche 3.3 oder 9 Cubischschuhe herum stellen;

len; auf die zweyte abermal 9, und auf die dritte noch einmal 9; das ist in allem 27. Wenn ich also die Länge drey mal mit sich selbst multiplicire, so bekomme ich den Inhalt des Cubus; dann $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$. Nun ist eine Ruthe 10' lang; folglich wird der Inhalt einer Cubieruthe $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ Cubische Schuhe betragen, ein Schuh ist 10" lang; folglich ist der Inhalt eines Cubischusses $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ Cubiczoll; will man den Zoll noch in Linien theilen, so wird ein Cubiczoll 1000 Cubiclinien halten u. s. w. Hieraus siehet man schon, was die Cubicrechnung für eine Progression gebe, und daß man bey derselbigen allemal drey Zahlzeichen für den Zoll und eben so viel für die Schuhe abschneiden müsse, ehe man zu den Ruthen kommt; wenn nemlich Zoll und Schuhe nebst den Ruthen vorhanden sind. Z. E. 6502846 Cubiczoll, sind $6^\circ 502' 846''$, oder 6 Cubieruthen, 502 Cubische Schuhe, 846 Cubiczolle. Die Ursache ist leicht zu begreifen. Dann weil erst 1000 Cubiczoll auf einen Cubischuh gehen, so gehört alles was unter 1000 ist, zu den Cubicollen, und was über 1000 ist, zu den Cubischuhen; eben so verhält sichs mit den Cubischuhen in Ab- sicht auf die Ruthen.

Wie viel Cu-
biczoll auf ei-
nen Cubic-
schuh und
wie viel Cu-
bic Schuh auf
eine Cubic-
ruthe geben,
und warum
man bey die-
ser Rechnung
je drey und
drey Zahlen
im geometris-
chen Maas
für die Zolle,
Schuhe u. s.
w. abschnei-
den müsse.

§. 170. Wie wir nun nicht zweifeln, **Wie ein Körper, der nicht gleich lang, breit und hoch seye, genannt und ausgemessen werde.** daß das bisherige unsern Lesern deutlich genug seye, so hoffen wir auch, daß das folgende ihnen faßlich seyn werde. Sie könnten vielleicht fragen, wie man einen Körper, dessen Breite, Länge und Höhen unterschieden seyen, ausmessen solle?

Tab. III.
fig. 43:

Die 43. Figur stellet einen von dieser Gattung vor; Er soll 7' lang, 4 breit und 3 hoch seyn; man wird also auf die unterste Fläche $4 \cdot 7$ Cubischschuhe hinstellen können; auf die zweyte wiederum so viel, und auf die dritte abermal so viel; folglich in allem $7 \cdot 4 \cdot 3$ Cubischschuhe; so bekommen wir seinen Inhalt. Er wird also gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt. Einen solchen Körper heißt man ein Parallelepipedum. Ein jedes Parallelepipedum läßt sich durch die Diagonallinie in zween gleiche Theile theilen, wie aus der 43. Figur erhellet, in welcher die Linie CD das Parallelepipedum in zween gleiche Theile schneidet, deren Grundflächen Dreyecke sind; ihr Inhalt wird also die Hälfte von einem Parallelepipedo von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn. Ein solches halbirtes Parallelepipedum heißt nun ein dreyeckigtes Prisma. Es gibt aber noch andere eckigte Figuren in der Stereometrie, welche unter schiefen Winkeln zusammen stoßen, und

worin

worinnen man die Cubischuhle u. s. w. nicht
 so herum legen kann, wie in den beeden
 schon benannten Körpern; dahero fragt
 man billig, wie man dann dißfalls die
 Sache angreifen müsse? Wir helfen uns
 hier, wie in der Planimetrie, durch die
 Reduction, und verwandeln einen schief
 stehenden Körper in ein Parallelepipedium
 von gleicher Grundfläche und Höhe. 3.
 E. ein Körper, dessen beede Grundflächen
 Rhomboides sind, wird in ein Parallele-
 pipedium verwandelt, dessen beede, das
 ist, die obere und untere Grundflächen,
 rechtwinklichte Vierecke sind, dann wenn
 man von beeden Körpern so viel mit der
 Grundfläche parallele Scheiben schneidet,
 als möglich ist, so wird man aus keiner
 mehr schneiden können, als aus der an-
 dern. Da nun diese Scheiben nach den
 Grundsätzen der Planimetrie gleich sind,
 so werden auch ihre Summen gleich
 seyn. Dieses nun deutlicher und auf ei-
 ner andern Seite vorzutragen, müssen
 wir wissen, was ein Prisma ist. Wenn
 ein Vieleck oder Polygon sich selbst alle-
 zeit parallel nach einer gewissen Richtung
 bewegt, so entsteht ein Prisma; oder ein
 Prisma ist ein Körper, dessen zwei Grund-
 flächen durch so viel Vierecke umschlossen
 werden, als die Grundflächen Seiten
 haben. Wenn demnach die Grundflä-
 chen Dreiecke sind, so wird der Prisma-
 tische

tische Körper die Helfte eines Parallelepipedum von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn, folglich durch drey Parallelogramma umschlossen werden; sind es Vierecke, so wird er durch vier, und sind es Fünfecke, so wird er durch fünf Parallelogramma umschlossen; u. s. w. Da nun ein jedes Polygon durch Diagonallinien in Dreyecke eingetheilt werden kann, so werden sich alle Prismata in dreyeckigte Prismata zerschneiden lassen; folglich lassen sich alle Prismata wie das dreyeckigte, durch die Multiplication der Grundfläche in die Höhe ausmessen. Dann die Summe aller dreyeckigten Prismaten, aus welchen ein gegebenes vieleckigtes besteht, ist der Inhalt von dem gegebenen Prisma; das ist, das Product der ganzen Grundfläche in die Höhe, und weil die Höhe nach Perpendicularinien abgemessen wird, so sieht man leicht, daß die Verwandlung angeht, und alle Prismata von einerley Grundflächen und Höhen, einander gleich seyen, folglich eines für das andere, was die Größe des Inhalts betrifft, gesetzt werden könne. Da man nun ferner einen Cylinder, das ist, einen Körper, dessen beide Grundflächen Cirkel sind, und welcher durch die sich allzeit parallele Bewegung einer Cirkelfläche entsteht, als ein Prisma von unendlich viel unendlich

Klein

Wie
ein Cy-
linder
entste-
he.

Tab.
III.
Fig.
47.

kleinen Seiten ansehen kann, so werden auch alle Cylinder nicht nur auf einerley Weise ausgemessen, sondern auch wenn sie von gleichen Grundlinien und Höhen sind, einander gleich seyn. Eben das müssen wir von den Pyramiden und Conischen Körpern oder sogenannten Kegeln sagen. Diese entstehen, wenn ein Dreieck sich um seine Grundlinie herumbewegt, jene aber, wenn eine eckigte Grundfläche durch so viel oben zusammen gehende Dreiecke umschlossen wird, als die Grundfläche Seiten hat. Folglich kann auch ein Conischer Körper als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche unendlich viel unendlich kleine Seiten hat. Und weil eine jede Pyramide als der dritte Theil eines Prismas von gleicher Grundlinie und Höhe betrachtet werden kann, so wird der Conische Körper oder der Kegel ebenfalls der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche seyn. Jenes kann man etnem augenscheinlich beweisen, wann man sich ein dreieckiges Prisma von Holz machen läßt, und selbiges hernach wirklich durch die Diagonallinien schneidet, daß gerade drey Pyramiden heraus kommen, welche einerley Grundlinie und einerley Höhen haben, folglich alle einander gleich sind; dieses wird der Verstand aus der Ähnlichkeit schließen; indeme er ei-

Wie die Pyramiden und
Tab. Kegel
III. oder
Fig. Coni-
sche
45. Adr.
46. der
47. per
entstehen.

Eine Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von gleicher Höhe und Grundfläche.

Eben so ist ein Conus

nein

om. I. Cap. Von der dreysfachen

n Regel als eine Pyramide bei-
dahero er auch die Folge hin-
kann, daß er der dritte Theil
nder seye, wie die Pyramide der
eil vom Prisma; welches letztes
Abbildungskraft gleichsam vor die

augen hingefchnitten, nicht aber so leicht
Grundfläche. hingemahlet werden kann. Da nun das
Maas eines Prismas und eines Cylinders
das Product der Grundfläche in die Hö-
he ist, so wird das Maas einer Pyrami-
de und eines Kegels der dritte Theil von
diesem Product, oder, welches gleichviel
ist, das Product der Grundfläche in den
Was ein ab- dritten Theil der Höhe seyn, Weil es
gekürzter Co- endlich auch abgekürzte Regel gibt, der
nus seye, und man solche nicht weniger ausmessen kön-
wie er aus- nen, wenn man nur bedenkt, daß der
gemessen abgekürzte Regel $ADFH$ die Differenz
werde. zwischen dem grossen Regel AEH und dem
kleinen DEF , oder daß $ADFH = AEH$
 $- DEF$ seye. Woserne ich nun diese
zwey Regel aus den gegebenen Grundflä-
chen und Höhe des abgekürzten Kegels
finden kann, so kann ich den Inhalt des
abgekürzten Kegels selbst bald finden.
Das ist uns sehr leicht. Dann wenn
man die Linie DB mit GC parallel ziehet,
so wird seyn

$$AB : BD = AC : CE ;$$

AB ist die Differenz der halben Durch-
mess

messer von den gegebenen beiden Grundflächen; BD die gegebene Höhe, und AC der halbe Durchmesser von der grössern Grundfläche; folglich ist CE die Höhe des ganzen Kegels in bekannten Grössen gefunden, nemlich $\frac{AC \cdot BD}{AB} = CE$, und weil EG , die Höhe des kleinen Kegels $= EC - GC$, so ist auch diese bekannt; weil man nun über diß die beide Grundflächen weiß, so darf man nur jede in dem dritten Theil ihrer correspondirenden Höhe multipliciren, und das kleinere Product vom grössern abziehen, so wird die Differenz der gesuchte Inhalt des abgekürzten Kegels seyn.

§. 171. Wir kommen nun auf die Die Arch.
wichtige Frage von dem Inhalt einer voll.
kommenen Kugel oder Sphäre. Diese medeische
nun werden wir am besten auflösen kön.
nen, wenn wir uns vorstellen, die Kugel Erfindung
entstehe durch die Bewegung oder Um.
wälzung eines halben Cirkels um seinen vom Inhalt
Diameter; der Cylinder aber durch die der Kugel.
Bewegung oder Ummwälzung eines Paral.
lelogrammi um eine seiner Seiten; wie
der Conus durch die Ummwälzung eines
Dreiecks auf gleiche Weise entsteht.
Dieses vorausgesetzt, müssen wir uns zu.
gleich erinnern, daß sich die Cirkelflächen
wie die Quadrate ihrer Diameter verhal.
ten; demnach werden auch zween Cylind.
der

448 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

der von gleicher Höhe sich wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Dann der eine Cylinder solle C der andere c seyn, die beiderseits gleiche Höhe aber a , und die Grundfläche von C solle B , die von c hingegen b heißen. So wird $C=Ba$ und $c=ba$, folglich

$$C:c = Ba:ba \quad \text{demnach}$$

$$:a$$

$$C:c = B:b$$

Weil nun die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer Diameter, die wir D und d nennen wollen: demnach ist

$$D^2:d^2 = B:b \quad \text{und}$$

$$\text{weil } C:c = B:b$$

$$C:c = D^2:d^2 \quad \text{so ist}$$

Die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter.

das ist, die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter, oder auch wie die Quadrate ihrer halben Diameter; dann ich darf nur mit 4 dividiren, so hat man $C:c = \frac{D^2}{4}:\frac{d^2}{4}$ das heißt, die Cylinder dieser Art verhalten sich, wie die Quadrate der halben Diameter. Wenn man nun wissen will, was das Maas der Kugel seye, so muß man sie mit einem Cylinder vergleichen, dessen Höhe der Diameter der Kugel, und dessen

te, und zeuget von einer nicht gemeinen Scharfsinnigkeit. Es lassen sich noch verschiedene Folgen daraus herleiten, die wir jezo vollends anführen wollen.

§. 172. Eine von den ersten Folgen Die Kugeln ist diese, daß sich die Kugeln oder Sphären zu einander verhalten wie die Cubi ihrer Diameter, Dann wenn der Diameter sich zu einander 100' ist, so ist sein Cubus 100. der wie die 100. 100 = 1000000', und die Kugel wird seyn $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, dessen Höhe Cubi ihrer 100' und dessen Grundfläche ein Cirkel Diameter. ist, der zum Diameter auch 100' hat, wie aus §. 171. erhellet. Die Grundfläche wird also nach §. 156. seyn 314.25 = 7850; und wenn man sie mit der Höhe = 100 multiplicirt, so wird 7850. 100 = 785000 der Inhalt des Cylinders seyn §. 170. Wenn ich nun dieses Product mit $\frac{2}{3}$ multiplicire, so habe ich den Inhalt der Kugel §. 171.

folglich ist $785000 \cdot \frac{2}{3} = 523333\frac{1}{3}$

der Inhalt der Kugel; demnach ist

Cubus Diam: Sphär = 1000000: 523333 $\frac{1}{3}$

und weil eine Verhältniß mit einer dritten Zahl 3. C. mit 3 multiplicirt, einerley bleibt, so ist:

Cubus Diam: Sphär = 3000000: 1570000.

: 10000.

Es 3

das

454 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

das ist, wenn die
Verhältniß mit
10000 dividirt
wird,

$$\text{Cubus Diam: Sphär} = 300 : 157.$$

Ein Ausdruck, den man, wenn man in der Uebung etwas thun will, auswendig lernen muß. Dann weil alle Kugeln eben so wohl als die Eirkel einander ähnlich sind, so ist die Verhältniß allgemein, und läßt sich auch auf alle Sphären oder Kugeln anwenden. Eine andere Folge ist nicht weniger wichtig. Sie bestehet darinnen, daß die Oberfläche einer Kugel dem viermal genommenen größten Eirkel der Kugel gleich seye. Dann ich kann die Kugel als eine Pyramide ansehen, deren Spitze in dem Mittelpunkte der Kugel ist, und deren Grundfläche die viermal gesammene Oberfläche der Kugel ist. Die Phantasie wird sich dieses vorstellen können, wenn sie nur die Kugel in Gedanken so auseinander legt, daß die in dem Mittelpunkte zusammen gehende Pyramiden von unendlich kleinen Grundflächen ihre Spitzen über sich lehren, und hernach in eine einige verwandelt werden, deren Grundfläche die Summe aller kleinen Grundflächen, und deren Höhe der Radius der Kugel ist. Ihr Inhalt wird also seyn die Grundfläche in den dritten Theil des Radius $\S. 170.$ oder in dem
sechsa

sechsten Theil des Diameters multiplicirt; das ist, das Product der ganzen Oberfläche der Kugel in den sechsten Theil ihres Diameters; demnach wird es folgende Rechnung geben, wenn wir den größten Cirkel circ. max. nennen; dann es ist

$$\text{Circ. max.} \times \text{diam} = \text{Cylind.} \quad \text{Folglich}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \text{Cylind.}$$

$$\text{Kugel} = \frac{2}{3} \text{Cylind} \quad \S. 171.$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max.} \times \text{diam} = \text{Kugel.}$$

$$\frac{1}{6} \text{diam.} \times \text{Oberfläche der Kugel} = \text{Kugel.}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \frac{1}{6} \text{diam.} \times \text{Oberfl. der Kugel.}$$

$$\frac{1}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam.} = \text{diam.} \times \text{Oberfläche der Kugel} : \text{diam.}$$

$$\frac{1}{3} \text{Circ. max} = \text{Oberfläche der Kugel}$$

das ist, wenn
man wirklich

$$\text{dividirt: } 4 \text{Circ. max} = \text{Oberfl. der Kugel.}$$

Da nun der größte Cirkel gefunden wird, wenn man seine Peripherie mit dem vierten Theil des Diameters multiplicirt, so wird die ganze Oberfläche der Kugel gefunden, wenn man die Peripherie des größten Cirkels mit dem ganzen Diameter multiplicirt. Und wenn ich dieses Product nochmalen mit dem sechsten Theil

§f 4

des

Erklärung

und

Beweis.

Wie ein Körper, der nicht gleich lang, breit und hoch seye, genannt und ausgemessen werde.

Tab. III.
fig. 43:

§. 170. Wie wir nun nicht zweifeln, daß das bisherige unsern Lesern deutlich genug seye, so hoffen wir auch, daß das folgende ihnen faßlich seyn werde. Sie könnten vielleicht fragen, wie man einen Körper, dessen Breite, Länge und Höhen unterschieden seyen, ausmessen solle? Die 43. Figur stellet einen von dieser Gattung vor; Er soll 7' lang, 4 breit und 3 hoch seyn; man wird also auf die unterste Fläche $4 \cdot 7$ Cubischuhbe hinstellen können; auf die zweyte wiederum so viel, und auf die dritte abermal so viel; folglich in allem $7 \cdot 4 \cdot 3$ Cubischuhbe; so bekommen wir seinen Inhalt. Er wird also gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt. Einen solchen Körper heißt man ein Parallelepipedum. Ein jedes Parallelepipedum läßt sich durch die Diagonallinie in zween gleiche Theile theilen, wie aus der 43. Figur erhellet, in welcher die Linie CD das Parallelepipedum in zween gleiche Theile schneidet, deren Grundflächen Dreyecke sind; ihr Inhalt wird also die Helfte von einem Parallelepipedo von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn. Ein solches halbirtes Parallelepipedum heißt nun ein dreyeckigtes Prisma. Es gibt aber noch andere eckigte Figuren in der Stereometrie, welche unter schiefen Winkeln zusammen stoßen, und

worin

worinnen man die Cubischuhle u. s. w. nicht
 so herum legen kann, wie in den beeden
 schon benannten Körpern; dahero fragt
 man billig, wie man dann dißfalls die
 Sache angreifen müsse? Wir helfen uns
 hier, wie in der Planimetrie, durch die
 Reduction, und verwandeln einen schief
 stehenden Körper in ein Parallelepipedum
 von gleicher Grundfläche und Höhe. Z.
 E. ein Körper, dessen beede Grundflächen
 Rhomboides sind, wird in ein Paralle-
 lepidum verwandelt, dessen beede, das
 ist, die obere und untere Grundflächen,
 rechtwinklichte Vierecke sind, dann wenn
 man von beeden Körpern so viel mit der
 Grundfläche parallele Scheiben schneidet,
 als möglich ist, so wird man aus keiner
 mehr schneiden können, als aus der an-
 dern. Da nun diese Scheiben nach den
 Grundsätzen der Planimetrie gleich sind,
 so werden auch ihre Summen gleich
 seyn. Dieses nun deutlicher und auf ei-
 ner andern Seite vorzutragen, müssen
 wir wissen, was ein Prisma ist. Wenn
 ein Vieleck oder Polygon sich selbst alle-
 zeit parallel nach einer gewissen Richtung
 bewegt, so entsteht ein Prisma; oder ein
 Prisma ist ein Körper, dessen zwei Grund-
 flächen durch so viel Vierecke umschlossen
 werden, als die Grundflächen Seiten
 haben. Wenn demnach die Grundflä-
 chen Dreiecke sind, so wird der Prisma-
 tische

tische Körper die Helfte eines Parallelepipedum von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn, folglich durch drey Parallelogramma umschlossen werden; sind es Vierecke, so wird er durch vier, und sind es Fünfecke, so wird er durch fünf Parallelogramma umschlossen; u. s. w. Da nun ein jedes Polygon durch Diagonallinien in Dreiecke eingetheilt werden kann, so werden sich alle Prismata in dreieckigte Prismata zerschneiden lassen; folglich lassen sich alle Prismata wie das dreieckigte, durch die Multiplication der Grundfläche in die Höhe ausmessen. Dann die Summe aller dreieckigten Prismaten, aus welchen ein gegebenes vieleckigtes besteht, ist der Inhalt von dem gegebenen Prisma; das ist, das Product der ganzen Grundfläche in die Höhe, und weil die Höhe nach Perpendicularlinien abgemessen wird, so sieht man leicht, daß die Verwandlung angeht, und alle Prismata von einerley Grundflächen und Höhen, einander gleich seyn, folglich eines für das andere, was die Größe des Inhalts betrifft, gesetzt werden könne. Da man nun ferner einen Cylinder, das ist, einen Körper, dessen beide Grundflächen Cirkel sind, und welcher durch die sich allzeit parallele Bewegung einer Cirkelfläche entsteht, als ein Prisma von unendlich viel unendlich klein

Wie
ein Co-
linder
entste-
he.

Tab.
III.
Fig.
47.

Keinen Seiten ansehen kann, so werden
 auch alle Cylinder nicht nur auf einerley
 Weise ausgemessen, sondern auch wenn
 sie von gleichen Grundlinien und Höhen
 sind, einander gleich seyn. Eben das
 müssen wir von den Pyramiden und Co-
 nischen Körpern oder sogenannten Kegeln
 sagen. Diese entstehen, wenn ein Drey-
 eck sich um seine Grundlinie herumbewegt, Wie die Py-
ramiden und
Tab. Regel
III. oder
Fig. Coni-
45. sche
46. Kör-
47. per
entstehen.
 jene aber, wenn eine eckigte Grundfläche
 durch so viel oben zusammen gehende
 Dreyecke umschlossen wird, als die
 Grundfläche Seiten hat. Folglich kann
 auch ein Conischer Körper als eine Pyra-
 mide betrachtet werden, deren Grundflä-
 che unendlich viel unendlich kleine Seiten
 hat. Und weil eine jede Pyramide als
 der dritte Theil eines Prismas von glei-
 cher Grundlinie und Höhe betrachtet wer-
 den kann, so wird der Conische Körper
 oder der Kegel ebenfalls der dritte Theil
 eines Cylinders von gleicher Höhe und
 Grundfläche seyn. Jenes kann man et-
 nem augenscheinlich beweisen, wann man
 sich ein dreyeckiges Prisma von Holz
 machen läßt, und selbiges hernach wirk-
 lich durch die Diagonallinien schneidet,
 daß gerade drey Pyramiden heraus kom-
 men, welche einerley Grundlinie und ei-
 nerley Höhen haben, folglich alle einander
 gleich sind; dieses wird der Verstand aus
 der Aehnlichkeit schließen; indeme er ei-
Eine Pyra-
mide ist der
dritte Theil
eines Prismas
von gleicher
Höhe und
Grundfläche.
Eben so ist
ein Conus
neu

om. I. Cap. Von der dreysfachen

n Regel als eine Pyramide bei-
dahero er auch die Folge hin-
kann, daß er der dritte Theil
nder seye, wie die Pyramide der
eil vom Prisma; welches letztes
nbildungskraft gleichsam vor die

augen hingesehnitten, nicht aber so leicht
Grundfläche, hingemahlet werden kann. Da nun das
Maas eines Prismas und eines Cylinders
das Product der Grundfläche in die Hö-
he ist, so wird das Maas einer Pyrami-
de und eines Kegels der dritte Theil von
diesem Product, oder, welches gleichviel
ist, das Product der Grundfläche in den
Was ein ab- dritten Theil der Höhe seyn. Weil es
gekürzter Co- endlich auch abgekürzte Regel gibt, ders
nus seye, und gleich einen die 48. Fig. weiset, so wird
wie er aus, man solche nicht weniger ausmessen kön-
gemessen nen, wenn man nur bedenkt, daß der
werde. abgekürzte Regel $ADFH$ die Differenz
zwischen dem grossen Regel AEH und dem
kleinen DEF , oder daß $ADFH = AEH$
— DEF seye. Woserne ich nun diese
zwey Regel aus den gegebenen Grundflä-
chen und Höhe des abgekürzten Kegels
finden kann, so kann ich den Inhalt des
abgekürzten Kegels selbst bald finden.
Das ist uns sehr leicht. Dann wenn
man die Linie DB mit GC parallel ziehet,
so wird seyn

$$AB : BD = AC : CE ;$$

AB ist die Differenz der halben Durch-
mess

messer von den gegebenen beiden Grund-
 flächen; BD die gegebene Höhe, und AC
 der halbe Durchmesser, von der grössern
 Grundfläche; folglich ist CE die Höhe des
 ganzen Kegels in bekannten Grössen ge-
 funden, nemlich $\frac{AC \cdot BD}{AB} = CE$, und weil
 EG , die Höhe des kleinen Kegels $= EC$
 $- GC$, so ist auch diese bekannt; weil
 man nun über diß die beide Grundflächen
 weiß, so darf man nur jede in dem drit-
 ten Theil ihrer correspondirenden Höhe
 multipliciren, und das kleinere Product
 vom grössern abziehen, so wird die Dif-
 ferenz der gesuchte Inhalt des abgekürzten
 Kegels seyn.

§. 171. Wir kommen nun auf die Die Archi-
 wichtige Frage von dem Inhalt einer voll-
 kommenen Kugel oder Sphäre. Diese medeische
 nun werden wir am besten auflösen kön-
 nen, wenn wir uns vorstellen, die Kugel
 entstehe durch die Bewegung oder Um-
 wälzung eines halben Cirkels um seinen vom Inhalt
 Durchmesser; der Cylinder aber durch die
 Bewegung oder Umwälzung eines Paral-
 lelogrammi um eine seiner Seiten; wie
 der Conus durch die Umwälzung eines
 Dreiecks auf gleiche Weise entsteht.
 Dieses vorausgesetzt, müssen wir uns zu-
 gleich erinnern, daß sich die Cirkelflächen
 wie die Quadrate ihrer Diameter verhal-
 ten; demnach werden auch zweu Cylins-
 der

448 Geom. I. Cap. Von der dreysfachen

der von gleicher Höhe sich wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Dann der eine Cylinder solle C der andere c seyn, die beiderseits gleiche Höhe aber a , und die Grundfläche von C solle B , die von c hingegen b heißen. So wird $C=Ba$ und $c=ba$, folglich

$$C:c = Ba:ba \quad \text{demnach}$$

$$:a$$

$$C:c = B:b$$

Weil nun die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer Diameter, die wir D und d nennen wollen: demnach ist

$$D^2:d^2 = B:b \quad \text{und}$$

$$\text{weil } C:c = B:b$$

$$\text{so ist}$$

$$C:c = D^2:d^2$$

Die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter.

das ist, die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter, oder auch wie die Quadrate ihrer halben Diameter; dann ich darf nur mit 4 dividiren, so hat man $C:c = \frac{D^2}{4}:\frac{d^2}{4}$ das heißt, die Cylinder dieser Art verhalten sich, wie die Quadrate der halben Diameter. Wenn man nun wissen will, was das Maas der Kugel sene, so muß man sie mit einem Cylinder vergleichen, dessen Höhe der Diameter der Kugel, und dessen

te, und zeuget von einer nicht gemeinen Scharfsinnigkeit. Es lassen sich noch verschiedene Folgen daraus herleiten, die wir jetzt vollends anführen wollen.

§. 172. Eine von den ersten Folgen Die Kugeln ist diese, daß sich die Kugeln oder Sphären zu einander verhalten wie die Cubi ihrer Diameter. Dann wenn der Diameter 100' ist, so ist sein Cubus 1000. der wie die 100.100 = 1000000', und die Kugel wird seyn $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, dessen Höhe 100' und dessen Grundfläche ein Circle Diameter ist, der zum Diameter auch 100' hat, wie aus §. 171. erhellet. Die Grundfläche wird also nach §. 156. seyn 314.25 = 7850; und wenn man sie mit der Höhe = 100 multiplicirt, so wird 7850.100 = 785000 der Inhalt des Cylinders seyn §. 170. Wenn ich nun dieses Product mit $\frac{2}{3}$ multiplicire, so habe ich den Inhalt der Kugel §. 171.

folglich ist $785000 \cdot \frac{2}{3} = 523333\frac{1}{3}$

der Inhalt der Kugel; demnach ist

Cubus Diam: Sphär = 1000000: 523333 $\frac{1}{3}$

und weil eine Verhältniß mit einer dritten Zahl 3. C. mit 3 multiplicirt, einerley bleibt, so ist

Cubus Diam: Sphär = 3000000: 1570000.
 $\frac{1}{3}$ 10000

8f 3

das

434 Geom. I. Cap. Von der dreysachen

das ist, wenn die
Verhältniß mit
10000 dividirt
wird,

$$\text{Cubus Diam: Sphär} = 300 : 157.$$

Ein Ausdruck, den man, wenn man in der Uebung etwas thun will, auswendig lernen muß. Dann weil alle Kugeln eben so wohl als die Eirkel einander ähnlich sind, so ist die Verhältniß allgemein, und läßt sich auch auf alle Sphären oder Kugeln anwenden. Eine andere Folge ist nicht weniger wichtig. Sie bestehet darinnen, daß die Oberfläche einer Kugel dem viermal genommenen größten Eirkel der Kugel gleich seye. Dann ich kann die Kugel als eine Pyramide ansehen, deren Spitze in dem Mittelpunkte sich endiget, und deren Grundfläche die ganze Oberfläche der Kugel ist. Die Phantasie wird sich dieses vorstellen können, wenn sie nur die Kugel in Gedanken so auseinander legt, daß die in dem Mittelpunkte zusammen gehende Pyramiden von unendlich kleinen Grundflächen ihre Spitzen über sich kehren, und hernach in eine einige verwandelt werden, deren Grundfläche die Summe aller kleinen Grundflächen, und deren Höhe der Radius der Kugel ist. Ihr Inhalt wird also seyn die Grundfläche in den dritten Theil des Radius g. 170. oder in dem
sechsa

sechsten Theil des Diameters multiplicirt; das ist, das Product der ganzen Oberfläche der Kugel in den sechsten Theil ihres Diameters; demnach wird es folgende Rechnung geben, wenn wir den größten Cirkel circ. max. nennen; dann es ist

Erklärung

und

Beweis.

$$\text{Circ. max.} \times \text{diam} = \text{Cylind.} \quad \text{Folglich}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \text{Cylind.}$$

$$\text{Kugel} = \frac{2}{3} \text{Cylind} \quad \S. 171.$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max.} \times \text{diam} = \text{Kugel.}$$

$$\frac{1}{2} \text{diam.} \times \text{Oberfläche der Kugel} = \text{Kugel.}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \frac{1}{2} \text{diam.} \times \text{Oberfl. der Kugel.}$$

$$\frac{1}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam.} = \text{diam.} \times \text{Oberfläche der Kugel} : \text{diam.}$$

$$\frac{1}{3} \text{Circ. max} = \text{Oberfläche der Kugel}$$

das ist, wenn
man wirklich

$$\text{dividirt: } 4 \text{Circ. max} = \text{Oberfl. der Kugel.}$$

Da nun der größte Cirkel gefunden wird, wenn man seine Peripherie mit dem vierten Theil des Diameters multiplicirt, so wird die ganze Oberfläche der Kugel gefunden, wenn man die Peripherie des größten Cirkels mit dem ganzen Diameter multiplicirt. Und wenn ich dieses Product nochmalen mit dem sechsten Theil

ff 4

des

Wie man aus des Diameters multiplicire, so habe ich
 dem gebe: den Cubischen Inhalt der ganzen Kugel.
 Man kann also aus dem gegebenen Dia-
 meter der Kugel sowohl ihre Oberfläche
 der Kugel als ihren Cubischen Inhalt finden. Wenn
 man also die Peripherie des größten Circ-
 lers p und den Diameter d nennet, so ist
 die Kugelfläche allemal dp , und folglich
 der Cubische Inhalt der Kugel selbst
 $dp \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}d^2 p$. Wenn ich nun diese
 Kugel in einen Cylinder verwandeln sol-
 le, dessen Höhe mir gegeben und a genant
 wird, so darf ich nur den Diameter des
 verlangten Cylinders suchen, welchen wir
 x nennen wollen; nun suchet man zuerst
 die Peripherie der Grundfläche des Cylinders,
 welcher, weil alle Peripherien des
 Circels zu ihren Diametern einerley Ver-
 hältniß haben, $\frac{px}{d}$ seyn wird. Indeme
 die selbst $\frac{px^2}{4d}$ und der körperliche In-
 halt des Cylinders, welcher durch die
 Multiplication der Grundfläche in die
 Höhe a entsteht, $\frac{apx^2}{4d}$; demnach muß
 nach der Bedingung der Aufgabe seyn

$$\frac{1}{2}d^2 p$$

$$\frac{1}{3}d^2 p = \frac{apx^2}{4d}$$

$$\frac{4d^3 p}{3} = apx^2$$

$$\frac{4d^3}{3} = ax^2$$

$$\frac{4d^3}{6a} = x^2$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2 \text{ oder}$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2 \text{ folglich}$$

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

dergleichen Aufgaben gibt es nun die Menge; so kann man z. E. eine Kugel in einem Conus und einen Conus in eine Kugel verwandeln. Dann wenn die Grund-

fläche eines Kegels $\frac{pd}{4}$ und seine Höhe a ist, und einen

so wird der cubische Inhalt seyn, $\frac{adp}{12}$; derum ist ein

und wenn der Diameter der ihm gleich zu machenden Kugel x heißt, so ist ihr

Inhalt $\frac{px^3}{6d}$; weil $d : p = x : \frac{px}{d}$ die Per-

ipherie des größten Cirkels; welche mit dem Diameter x multiplicirt die Oberflä-

che der Kugel $\frac{px^2}{d}$ gibt, und diese mit dem

sechsten Theil des Diameters x multipli-

Et 5 circ

eine den cubischen Inhalt $\frac{px^3}{6d}$ bestimmte.

Folglich muß nach der Bedingung des Problems seyn

$$\frac{1}{12} a d p = \frac{px^3}{6d}$$

$$\frac{1}{12} a d^2 p = px^3$$

$$\frac{1}{12} a d^2 p = px^3 \quad \text{das ist}$$

$$\frac{1}{12} a d^2 p = px^3$$

$$\frac{1}{12} a d^2 = x^3 : p$$

$$\frac{1}{12} a d^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{12} a d^2} = x$$

Ob und wann man eine Kugel nicht auch in einen vollkommenen Cubus verwandeln könne?

Von dem Delphischen Problem einen Cubus zu verdoppeln;

§. 173. Fragt man aber, ob man eine Kugel nicht auch in einen vollkommenen Cubus verwandeln könne, so müssen wir mit nein antworten; dann die Cubatur der Kugel ist bis jezo noch so wenig erfunden worden, als die Quadratur des Kreises. Hingegen das Delphische Problem, welches die Meßkünstler des alten Athens so lange Zeit vergebens gesucht haben, ist aus dem bisherigen leicht aufzulösen. Der heidnische Apollo wurde um Abwendung der Pest von den Athenern angerufen; Er versprach zu helfen, wofern man seinen Altar zu Delphi, welcher ein vollkommener Cubus war, verdoppeln oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal so groß, und doch, wie der vorige abermal ein voll-

komme

kommenen Cubus wäre. Dieses Problem gab nun Griechenland allen seinen Weisen auf; vermuthlich steckten es die Meszkünstler selbst hinter die Delphische Priester, damit der Ausspruch des Apollo alle Gelehrte in der Welt dazu aufmuntern möchte. Man wollte die Sache mit einer geometrischen Zuverlässigkeit und nicht mechanisch ausmachen; Da es aber den meisten zu schwer fiel, so blieb das Problem lange unausgelöst; Eratosthenes, ein Bibliothecarius zu Alexandrien, und der berühmte Hippocrates von dem wir ein quadrirtes Stück des Circels haben, versielen zuerst auf die Gedanken, daß das Problem von der Erfindung zweer mittleren Proportionallinien zwischen zwe gegebenen Zahlen abhänge. Das wollen wir jezo beweisen. Es seyen zween Cubi, davon der eine B nochmalen so groß seyn solle, als der erstere, den wir A nennen. Die Seite des Cubus A heisset man a ; demnach wird der Inhalt a^3 seyn; die Seite des Cubus B sey x , so wird sein Inhalt x^3 seyn. Da nun B nochmalen so groß als A , so wird nach der Bedingung des Problems seyn

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{folglich}$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

Daß nun $a\sqrt[3]{2}$ nichts anders seye, als

Wie und warum diese Aufgaben von Erfindung zweer mittlern Proportionallinien abhängen sei,

und Beweis des Delphischen Problems

bleibt von die

Verdopp- die erstere oder kleinere von zwei mittleren
lung des Cu. Proportionalzahlen zwischen a und $2a$, wird
bus. sich leicht zeigen. Dann es seye die erste
 mittlere Proportionalzahl x und die andere
 y , so ist $a:x=y:2a$, demnach weil die
 Proportion continuirlich ist, hat man

$$\text{nr. I. } a:x=x:y \text{ und } x:y=y:2a$$

$$ay = x^2 \quad 2ax = y^2 \text{ nr. II.}$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

$$y^2 = 2ax \text{ nr. II. folglich §. 2.}$$

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$\frac{x^4}{a^2} \cdot a^2$$

$$x^4 = 2a^3x$$

$$\frac{x^4}{x} = 2a^3x$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$\frac{x^3}{2a^3} = 1$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

dieses aber ist
 die Seite des doppelten Cubus; daher
 ist sie auch die erstere mittlere Proportio-
 nalzahl von den zwei gesuchten mittleren
 Proportionalzahlen zwischen a und $2a$,
 oder zwischen der einfachen und doppelten
 Seite des erstern Cubus A .

§. 174. Wir müssen auch was von Was man uns
den sogenannten regulären geometrischen Körpern sagen. Zu dem Ende bestimmen
wir vorher den Begriff eines körperlichen Winkels. Wenn drei oder mehr
Flächen in einem Punkt unter einer gewissen Neigung zusammen stoßen, so heißt
man den daraus entstehenden Winkel einen körperlichen Winkel. Ein solcher
Winkel kann niemals völlig 360° halten, sonst wäre es kein Winkel, sondern würde
in eine Breite und ebene Fläche fallen. Er muß demnach allemal weniger als
 360° in sich begreifen. Da nun ein regulärer geometrischer Körper derjenige
ist, der entweder in lauter gleichseitige Dreiecke, oder Vierecke oder überhaupt
Vielecke eingeschlossen ist, so fragt man billig, wie viel es solche reguläre geometrische
Körper gebe? Wir werden bald hören, daß es deren nicht weiter als fünf
gibt. Dann ein körperlicher Winkel muß kleiner als 360° seyn. Da man
nun wenigstens drei Flächen zu einem körperlichen Winkel braucht, so wollen
wir den Anfang mit dem gleichseitigen Dreieck machen, und sehen, wie viel
reguläre Körper durch Dreiecke entstehen können. Der Winkel im gleichseitigen
Dreieck ist 60° ; folglich wird man drei Körper durch dergleichen Dreiecke auf-
bauen können: dann

und warum $3 \cdot 60 = 180^\circ$ und gibt der Winkel des
 man deren Tetraedri;
 nicht weiter $4 \cdot 60 = 240^\circ$ und gibt der Winkel des
 als fünf Octoedri;
 sechsen könn $5 \cdot 60 = 300^\circ$ und gibt der Winkel des
 net? $6 \cdot 60 = 360^\circ$ ist schon zu groß, und
 gibt eine Fläche und kei-
 nen körperlichen Win-
 kel mehr.

Ferner der Winkel im Quadrat ist 90° ;
 da nun

$3 \cdot 90 = 270^\circ$, so bekommt man den Win-
 kel des Hexaedri oder Cubi;

$4 \cdot 90 = 360^\circ$ ist schon zu groß, und
 gibt keinen körperlichen Winkel mehr, das
 Hero aus dem Quadrat nur ein einziger
 regulairer Körper sich bauen läßt. Der
 Winkel im Fünfeck hält 108° ; wir wol-
 len sehen, ob dieser zu einem körperlichen
 Winkel der regulairen Körper was bey-
 trägt; wenn er mit 3 multiplicirt noch
 kleiner ist als 360° , so wird er dazu sich
 schicken. Die Sache verhält sich auch
 wirklich also, dann

$3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$, und gibt den körperli-
 chen Winkel des so ge-
 nannten Dodecaedri.

Hingegen $4 \cdot 108 = 432$ ist schon um vier
 les zu groß, und gibt keinen körperlichen
 Winkel mehr. Eben so wenig geht es
 mit dem Sechseck an, dann sein Poly-
 gon

gonwinkel ist 120° , und $3 \cdot 120$ ist schon 360° ; folglich gibt das Sechseck keinen regulären Körper, und noch vielweniger das Siebeneck, u. s. w. weil sein Winkel noch grösser ist. Die reguläre Körper sind also fünf; nemlich drey lassen sich aus dem Dreieck, einer aus dem Viereck, und einer aus dem Fünfeck erbauen. Hingegen irreguläre Körper giebt es die Menge. Wann sie gar nichts reguläres an sich haben, und man will sie doch messen, so kann man ihren Inhalt einfacher massen finden, wenn man einen Cubus mit Wasser füllt, und bemerkt, wie hoch das Wasser darinnen steht, sodann den irregulären Körper hinein legt, und abermal die Höhe des aus der Stelle getriebenen und empor gestiegenen Wassers beobachtet. Die Differenz der beyden Höhen wird den Inhalt des Körpers bestimmen. Diß aber ist praktisch. Man begreift von selbst, daß man ein anders Mittel ausfinden müsse, wenn man den Körper nicht naß machen darf; daher oetmige auch Sand angerathen haben. u. s. w. Alles dieses gehört in die praktische Geometrie, mit deren wir uns diesmal nicht beschäftigen. Da wir nun in der Theorie nichts vergessen oder zurückgelassen, so eilen wir jezo zum folgenden, und werden nunmehr auch die Grundsätze der Trigonometrie vortragen.

U. Cap.

II. Cap.

Von Ausmessung der Dreyecke
insbesondere, oder von der
ebenen Trigonometrie.

§. 175.

Warum man
von den
Dreyecken
und deren
Maas noch
besonders
handle.

Die Lehre von den Dreyecken ist so fruchtbar, daß sie noch einen besondern Theil der geometrischen Wissenschaften ausmachen kann. Wir haben zwar in dem vorigen Capitel schon gezeigt, wie man ihre Flächen genau ausmessen, und auch den Umfang finden könne, wenn einem der Inhalte nebst der Grundlinie und Höhe gegeben ist. Allein es gibt oft Dreyecke, davon wir nichts als etwa eine Linie und ein paar Winkel wissen u. s. w. Dahero in allem weg nöthig ist, daß wir auch zeigen, wie man dinstfalls die übrige Linien der Dreyecke finden könne. Die Wichtigkeit dieser Lehre erbhellet unter anderm auch daraus, weil man nicht um alle Dreyecke, die man messen will, herumgehen kann, indeme manche sich oft an dem entferntesten Fixstern endigen, und zur Grundlinie den Diameter der ganzen Erdbahn haben. Da wir nun die Art und Weise, wie man

man auch die unbekannte Theile solcher grossen Dreyecke aus einigen bekannten Theilen finden solle, noch nicht umständlich vorgetragen, und es doch der Mühe werth ist, daß man so grosse und unzugängliche Zwischenweiten, z. E. von der Erde bis an die Sonne, oder an die noch weiter abstehende Sterne, u. s. w. zu bestimmen wisse, so werden unsere Leser schon jezo vorläufig von dem Nutzen derjenigen Wissenschaft überzeugt werden, deren Anfangsgründe wir gegenwärtig vortragen. Sie heisst mit einem Wort die Trigonometrie oder die Kunst Dreyecke auszumessen, und lehret uns, wie man aus drey gegebenen Theilen eines Dreyecks, worunter aber allemal wenigstens eine Seite seyn muß, die übrigen drey Theile finden solle. Diese Erklärung wird man leicht begreifen. Dann ein jedes Dreyeck hat drey Seiten und drey Winkel; drey Winkel nun bestimmen ein Dreyeck noch nicht, §. 165. Folglich würde die Aufgabe, aus drey gegebenen Winkeln das Dreyeck selbst zu finden, eine unbestimmte Aufgabe seyn. §. 127. Da aber entweder drey Seiten, oder zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zweyen Winkel ein Dreyeck bestimmen, §. 144. so siehet man schon, woher es komme, daß wir sagen, aus drey gegebenen Stücken könne man

man die übrige finden, und unter diesen Stücken müsse nothwendig eine Seite gegeben werden. Da nun ferner die Dreiecke entweder geradelinicht oder

Es gibt eine krummlinicht sind, so theilet sich die Trigonometrie von selbst in zween Theile, davon der eine die geradelinichte, der andere aber die krummlinichte und vorzüglich die sphärische Trigonometrie in sich begreift; weil aber die letztere nur in der Astronomie gebraucht wird, folglich

kurze Anzeige
von der lei-
tern oder
sphärischen
Trigonome-
trie,

Tab. III. aus der 56. Fig. erhellet, überhaupt einen Fig. 56. Begriff von sphärischen Dreiecken, der

ren Seiten Cirkelbögen sind, sich bilden kann. Dann daß sie nach andern Regeln als die geradelinichte Dreiecke, sich richten, wird in der Astronomie erwiesen. So halten z. E. in einem jeden Sphärischen Dreieck alle drey Winkel zusammen mehr als 180° , und können daher nicht nur zwey, sondern auch drey rechte

Warum man
vorzüglich
die geradelinichte Trigonometrie abhandle und nicht die krummlinichte die u-
bergehe.

ja gar stumpfe Winkel hie statt haben u. s. w. Dieses aber gehört nicht hieher. Die geradelinichte Trigonometrie breitet ihren Nutzen nicht blos über die astronomische, sondern über alle nur mögliche mathematische Wissenschaften aus. Darum verdienet sie in der Lehre von der ersten

sten

sten Gründen aller mathematischen Wissenschaften einen vorzüglichen Platz.

§. 176. Wenn man von dem einen Tab. III. Schenkel EC eines Winkels ECA , auf Fig. 49. dem andern Schenkel AC einen Perpen. Erklärung: dieser in der Trigonometrie vorkommenden Namen, dikel ED herunter fällt, so heißt dieser Sinus des Winkels ECA und auch der Sinus des Bogens EA . Beschreibt man nun um einen solchen Winkel aus der Spitze C , die man aus seye, zum Mittelpunkt annimmt, einen Cirkel, und wie man so wird man neben dem Sinus DE noch Tab. III. andere Linien ziehen können, welche in der fig. 50: Trigonometrie ihre eigene Nahmen haben. Der Sinus ED selbst kann noch ihn auf einer doppelten Seite betrachtet werden; Seite betrachten könne, dann weil er auf AC perpendicular stehet, so wird er die Hälfte von der verlängerten Sehne GE seyn; und weil sich in dem Nebenwinkel ECF keine Perpendicular-Linie von einem Schenkel zum andern ziehen läßt, als eben die auf den nach A der Sinus verlängerten Schenkel CF herabgezogene des folgenden Winkels ist Linie ED , so wird sie auch der Sinus des auch der Sinus des Nebenwinkels ECF , folglich des Bogens aus des stumpfen Nebenwinkels; EF seyn. Also ist der Sinus eines jeden spitzen Winkels auch der Sinus des stumpfen Nebenwinkels; weil ferner die Schenkel eines rechten Winkels auf einander perpendicular stehen, so wird der Sinus des rechten Winkels mit dem einen oder dem andern Schenkel selbst zusammen

Der Sinus
des rechten
Winkels ist
der Radius,
der deswegen
Sinus totus
heißt.

men fallen, folglich im Cirkel der Radius seyn; daher ist CR , der Radius, zugleich der Sinus des rechten Winkels ACR , und heißt deswegen der Sinus totus, ein Name, den man sich vorzüglich bekannt machen muß. Endlich erbhellet auch noch dieses, daß ein jeder Sinus die Hälfte derjenigen Sehne seye, welche dem doppelten Winkel am Mittelpunkte entgegen steht; daher ist der Sinus totus die Hälfte der größten Sehne, nemlich des Diameters.

Was die
Tangenten
seyn,

Tab. III.
fig. 50.

Die Tangen-
te von 45°
ist dem Ra-
dius, oder
dem Sinus
totus gleich.

§. 177. Wenn man an dem Ende des Radius AC eine Perpendicularlinie aufrichtet, oder überhaupt in dem Punkt A eine Parallellinie mit dem Sinus DE ziehet, so heißt die Linie AH , welche von dem nach H verlängerten Schenkel CE durchschnitten wird, die Tangente des Bogens AE und folglich auch des Winkels ACE ; welchen Namen man abermal sich wohl bekannt machen muß, wenn man in der Trigonometrie einen guten Fortgang bekommen will. Hieraus siehet man nun sogleich, daß die Tangente von 45° dem Sinus totus gleich seyn müsse. Dann weil bey A allemal ein rechter Winkel ist, so ist, wenn der Winkel $ACH = 45^\circ$, auch der Winkel $AHC = 45^\circ$; §. 147. folglich AHC ein gleichschenklisches Dreieck §. 145. und daher in diesem Fall $AH = AC$, oder dem

dem Radius, welcher allemal der Sinus totus ist. Es sind noch einige Linien, die man sich bekannt machen kann, wiewohl sie nicht so wichtig sind, als die beede schon erklärte Linien. Wir wollen daher nur kürzlich ihre Nahmen nennen.

Die Linie HC , wodurch die Tangente in H durchschnitten und bestimmt wird, heißt die Secante; (Secans) die Linie AD , der Sinus versus, die Linie $DC = EK$ der Cosinus; SR die Cotangente (Cotangens) und CS die Cosecante; (Cosecans.)

Die Nahmen
Secante, Si-
nus versus,
Cosinus und
Cotangens
werden er-
klärt.

Unter diesen Linien ist vornemlich der Cosinus noch zu behalten, welcher durch den Sinus ED bestimmt und abgeschnitten

wird; so ist in der 42. Fig. DC der Cosinus des Winkels ECA , wie es in der 50. Fig. DC vom Winkel DCE ist. Die Ursache, warum man diesen noch wissen muß, ist leicht begreiflich. Der Cosinus ist allemal der Sinus desjenigen Winkels, der mit dem gegebenen Winkel zusammen genommen 90° oder den Quadranten AER ausmacht, daher er auch der Sinus complementi heißt. Dann $ECA + ECR = ACR$.

Warum man
die Erklä-
rung des Co-
sinus beson-
ders zu mer-
ken habe.

Da man nun aus dem gegebenen Sinus den Cosinus finden kann, wie wir sogleich zeigen werden, so darf man die Sinus nur bis auf 45° suchen, weil alle Sinus der Winkel, die über 45° halten, Cosinus derjenigen Winkel sind, die unter 45° sind. So ist der Sinus

Warum man
die Sinus
nur bis auf
 45° suchen
darf, und
wie die übr-
igen durch die

Cosinus der von 46° der Cosinus des Winkels von 44° , der Sinus von 60° ist der Cosinus des Winkels von 30° , der Sinus von 89° ist der Cosinus des Winkels von 1° u. s. m.

Worum man S. 178. Nun hat man die Sinus die Art und Weise die Sinus zu berechnen nicht weilläufig vortrage.

Starke Angelegenheit, wie die Sinus u. s. w. berechnet werden.

Der Sinus von 30° ist die Hälfte des Sinus totus.

S. 178. Nun hat man die Sinus von allen Graden nicht nur sondern auch von den Minuten u. s. w. längstens berechnet, und diese mühsame Arbeit ist um einen wohlfeilen Preis gedruckt zu haben. Wir werden dahero die Art und Weise der Berechnung selbst nicht weilläufig vortragen. Doch ist nöthig, daß wir unsern Lesern einen Begriff von der Arbeit derjenigen geben, welche Jahr und Tage hindurch fast nichts anders thun mußten, als Sinus, Cosinus, Tangenten und Secanten berechnen. Man hat den Sinus totus 10000000 Theilgen groß angenommen, und gesucht, wie viel von diesen Theilen auf einen Sinus von so und so viel Graden, Minuten, Secunden u. s. w. gehen. Damit man nun die Sache so richtig berechnen konnte, als möglich war: so dachte man, die Seite des Sechsecks ist dem Radius gleich, und weil der Radius der Sinus totus ist, so ist sie auch diesem gleich. Da nun eine dieser Seite als eine Sehne angesehen werden kann, und eine jede Sehne ein doppelter Sinus ist, so fand man leicht, daß der Sinus von 30° , oder der Hälfte des

der Dreyecke oder der Trigonom. 471

des der Sehne am Mittelpunkt entgegen
stehenden Winkels die Helfte des Sinus
totus seye. Aus diesem gefundenen Si-
nus, der $\frac{10000000}{2} = 5000000$ ist,

Hat man dann den Sinus des halben und
des doppelten Winkels u. s. w. gesucht, da
sich immer neue Vortheile ergaben. Der Sinus von 45° wurde auf eine ähnliche
Weise gefunden. Man zoge die Sehne
RF, welche nach den Lehrsätzen des vor-
gen Capitels §. 161. nichts anders ist als

$\sqrt{RC^2 + CF^2}$; oder weil $RC = CF$,
indeme es Radii sind, $\sqrt{2RC^2}$, das ist,
die Quadratwurzel aus dem doppelten
Quadrat des Sinus totus. Diese zoge
man aus, und halbirte sie, daher man
den Sinus von 45° bekame, welcher der
halben Sehne RF nach §. 176. gleich
seyn muß.

Den Cosinus z. E. DC fan-
de man aus dem gegebenen Sinus ED,
in dem man sagte $EC^2 - ED^2 = DC^2$
folglich $DC = \sqrt{EC^2 - ED^2}$. Man
quadrirte also den Sinus totus, und sub-
trahirte das Quadrat des gegebenen Si-
nus davon, sodann zog man aus dem
Rest die Quadratwurzel aus u. s. w. Aus
dem Sinus und Cosinus fand man die
Tangenten, weil $CD:DE = CA:AH$,
dahero die Tangente $AH = \frac{DE \cdot CA}{CD}$

Tab. III.
Fig. 50.

Kurze Regel,
aus dem ge-
gebenen Si-
nus den Co-
sinus zu fin-
den,

wie auch her-
nach die Tan-
genten,

$\frac{\sin. tot. \times \sin.}{\cosin.}$ u. s. w. Auf eine ähnl-
liche

und Secan- liche Weise ergab sich die Secante CH ,
 ten u. f. w. indeme man sagte $CD:CE = CA:CH$,
 folglich, weil $CE = CA$, die Secante

$$CH = \frac{CA^2}{CD} = \frac{(\sin. tot)^2}{\cos.} \text{ u. f. w.}$$

Doch genug von diesem; unsere Leser sehen schon, wie mühsam diese Arbeit ist, unerachtet man übrigens nicht viel Nachsinnen dazu braucht.

§ 172. Es ist hierinnen, wie mit den Logarithmen durch die gedruckte Tabulae Sinuum und Tangentium schon längstens allen denjenigen vorgeschafft worden, welche in der praktischen Trigonometrie sich üben wollen; daher wir weiter nichts hinzusetzen, als daß wir nur noch zeigen, wie man den Sinus des doppelten, dreysfachen, vierfachen Winkels u. f. w. aus dem gegebenen Sinus des einfachen finden könne. Man gibt den Winkel ACD und seinen Sinus AD ; nun solle man den Sinus des doppelten, dreysfachen u. f. w. suchen. Aus der Figur erhellet von selbst, daß CA der Sinus totus, wie z. E. in der 50. Fig. bey dem Winkel ECD auch EC der Sinus totus ist. Demnach wird auch CD der Cosinus seyn, $= \sqrt{CA^2 - AD^2}$; folglich läßt sich auch dieser finden. Nun verlängere man CD nach Belieben bis in G und CA bis in F , und ziehe die Linie AB
 $= AC$,

Tab. III.
Fig. 6a.

Tab. III.
Fig. 6a.

$= AC$, daß man das gleichschenklliche Dreyeck CAB bekomme; auf gleiche Weise bestimme man mit einerley Eröffnung des Cirkels die Linie $BF = AB = AC$, so wird sich das gleichschenklliche Dreyeck ABF ergeben; ferner mache man $FG = FB = BA = AC$, damit man noch ein gleichschenklliches Dreyeck BFG bekomme u. s. w. In diesem Fall nun wird die von B auf CF gefällte Perpendicularinie BE der Sinus des doppelten Winkels ACD , und die von F auf CG gefällte Perpendicularinie FH der Sinus des dreysfachen Winkels ACD werden, u. s. w. Dieses wollen wir jezo beweisen;

Zu Lösung,

und

Beweis.

$$r = n + a \quad \S. 147.$$

$$n = 0 \quad \S. 145.$$

$$r = n + n$$

$$2n = n + n$$

$$r = 2n \quad \text{da nun}$$

$$\sin. r = EB, \quad \text{so ist auch}$$

$$\sin. 2n = EB.$$

Aus gleichem Grunde ist r der äussere Winkel von dem Dreyeck CBF , folglich so groß als $n + x$ zusammen ist; da nun $x = r$, weil das Dreyeck ABF gleichschenkllich ist, und $r = 2n$, wie wir erwiesen, so ist $r = n + 2n = 3n$; folglich FH der Sinus von r auch der Sinus von $3n$. Oder in Zeichen:

$$\S. 1$$

$$r =$$

$$s = n + x$$

$$r = x \quad \S. 141.$$

$$s = n + r$$

$$2n = r$$

$$s = n + 2n \quad \text{das ist}$$

$$s = 3n.$$

$$\text{Da nun} \\ \sin. s = FH \quad \text{so ist auch} \\ \sin. 3n = FH.$$

Da nun ferner, weil bey D und E rechte Winkel sind, und n sich selber gleich ist, nach den Proportionsregeln

$$CA:AD = CB:BE \quad \text{das ist}$$

$\sin. tot: \sin = 2 \cos: BE$, so findet man den Sinus des doppelten Winkels

$$EB = \frac{\sin. 2 \cos.}{\sin. tot.}, \quad \text{wenn man nemlich}$$

den gegebenen Sinus des einfachen Winkels mit seinem doppelten Cosinus multiplicirt, und das Product durch den Sinus totus dividirt. Weil nun abermal aus gleichem Grunde $CA:CD = CB:CE$

$$\text{folglich } CE = \frac{CD \cdot CB}{CA}, \quad \text{und } AE = CE$$

$$- CA = \frac{CD \cdot CB}{CA} - CA = \frac{CD \cdot CB - CA^2}{CA}$$

$$\text{Folglich (weil } CB = 2CD,) \\ = \frac{CD \cdot 2CD - CA^2}{CA} = \frac{2ED^2 - CA^2}{CA},$$

$$\text{und (weil } CA^2 = ED^2 + AD^2,) \quad \text{Der letzte}$$

der Dreyecke oder der Trigonom. 475

setze dem obigen aber vollkommen gleiche

$$\text{Ausdruck} \quad \frac{2CD^2 - CD^2 - AD^2}{CA}$$

$$= \frac{CD^2 - AD^2}{CA}. \text{ Nun ist } AE = EF,$$

weil die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks durch die Perpendicularlinie BE in zween gleiche Theile getheilet wird; folglich wird

$$EF = \frac{CD^2 - AD^2}{CA} \text{ und daher}$$

$$\begin{aligned} CF &= CE + EF = \frac{CD \cdot CB}{CA} + \frac{CD^2 - AD^2}{CA} \\ &= \frac{2CD^2}{CA} + \frac{CD^2 - AD^2}{CA} = \frac{3CD^2 - AD^2}{CA}. \end{aligned}$$

Nunmehr ergibt sich leicht eine neue Proportion, $CA:AD=CF:FH$, das ist, wenn man den gefundenen Ausdruck für CF setzt,

$$CA:AD = \frac{3CD^2 - AD^2}{CA} : FH,$$

folglich ist FH der Sinus des dreysfachen

$$\text{Winkels} = \frac{3CD^2 \cdot AD - AD^3}{CA^3} \text{ das ist,}$$

wenn man die Linien wirklich mit den Trigonometrischen Nahmen bezeuget,

$$\frac{3(\sin. \times \text{Cosin.}^2) - (\sin.^3)}{(\sin. \text{ tot.}^3)}$$

Oder, wenn der $\sin. \text{ tot.} = r$ der Sinus

$= s$

476 Geom. II. Cap. Von Ausmessung

Allgemeine
Regel für
den Sinus
des vielfa-
chen Win-
kels,

= s und der Cosinus = c gesetzt wird, so
hat man den Sinus des dreysfachen Winkels
= $\frac{3sc^2 - s^3}{r^2}$. Nach eben diesen Res-

geln sucht man den Sinus des vierfachen
Winkels u. s. w. Da sich dann eine
Progression ergeben wird, welche die fol-
gende ist;

Der Sinus des einfachen Winkels seye
= s

so ist der Sinus des zweyfachen = $\frac{2sc}{r}$

des dreysfachen = $\frac{3sc^2 - s^3}{r^2}$

des vierfachen = $\frac{4sc^3 - 4s^3c}{r^3}$

des fünffachen = $\frac{5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5}{r^4}$

des sechsfachen = $\frac{6sc^5 - 20s^3c^3 + 6s^5c}{r^5}$

des siebenfach, = $\frac{7sc^6 - 35s^3c^4 + 21s^5c^2 - s^7}{r^6}$

Wenn man nun diese Progression mit dem
Newtonischen Binomio §. 111. vergleicht,
so wird man finden, daß der Sinus des
vielfachen Winkels überhaupt durch einen
allgemeinen Ausdruck seye

$$\frac{n c^{n-1} s}{r^{n-1}} - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^{n-1}} +$$

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \cdot n - 5 s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 r^{n-1}} \text{ u. f. w.}$$

Singegen der Cosinus wird folgende Progression geben; Wie auch für
den Cosinus
des vielfa-
chen Win-
kels.
nämlich der Cosinus des einfachen Winkels

$$= c$$

$$\text{des zweyfachen} = \frac{c^2 - s^2}{r}$$

$$\text{des dreysfachen} = \frac{c^3 - 3s^2c}{r^2}$$

$$\text{des vierfachen} = \frac{c^4 - 6s^2c^2 + s^4}{r^3}$$

$$\text{des fünfffachen} = \frac{c^5 - 10s^2c^3 + 5s^4c}{r^4} \text{ u. f. w.}$$

Dahero der allgemeine Ausdruck für den vielfachen Cosinus ist $\frac{c^n}{r^{n-1}} -$

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot c^{n-2} s^2}{1 \cdot 2 r^{n-1}} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot c^{n-4} s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 r^{n-1}}$$

u. f. w. Diese Formeln lassen sich bey der Anwendung auf verschiedene Fälle noch kürzer ausdrücken; allein uns genüget, die allgemeine Regel angeführt und erwiesen zu haben. Man wird im folgenden fortkommen können, wenn man diesen ganzen Absatz überschlägt, welches
wir

wir zum Behuf für die Anfänger, denen diese Auflösung zu mühsam scheinen möchte, noch hinzu sagen. Aus eben diesem Grunde wollen wir auch die allgemeine Regel für die Tangenten diesmal übergehen. Im vierten Capitel werden solche Sätze vorgetragen werden, durch welche dergleichen Arbeiten ungemein erleichtert werden. Die Lehre von Erfindung der Sinus für die Minuten und Secunden, beruhet auf dem Satz, daß man einen so kleinen Bogen für eine gerade Linie ansehen könne; da dann hernach alles nach den Proportionsregeln ähnlicher Dreyecke bestimmt und gefunden wird.

Wie man die Sinus der Minuten und Secunden finde.

Anwendung dieser Lehre auf die Erfindung der unbekannten Stücke eines Dreyecks;

wozu man nur zween Sätze nöthig hat,

Tab. III. Fig. 52. der erste ist, daß die Sinus ähnlicher Bogen einanderley Verhältniß zu ihren Radiis haben.

§. 180. Nun wollen wir zeigen, wie man durch Hülfe der Sinus und Tangenten die noch unbekannte Stücke der Dreyecke aus einigen gegebenen Theilen finden könne. Wir haben nur zween Sätze dazu nöthig, die wir jezo erweisen wollen. Der erste ist der folgende: Die Sinus ähnlicher Bogen haben einerley Verhältniß zu ihren Radiis; das ist:

Tab. III. $GF:GC = ED:EC$. Der Beweis ist

leicht; bey D und F sind rechte Winkel; und der Winkel GCD ist sich selber gleich, folglich ist das Dreyeck GFC dem Dreyeck EDC ähnlich; demnach werden auch die gleichen Winkeln entgegen stehende Seiten proportionell seyn; das ist

$GF:GC = ED:EC$; hieraus siehet man,

man, daß es gleichviel ist, ob ich den Sinus eines Winkels DCG von G oder von E herabziehe, das ist einer na-
 oder weiten Entfernung vom Scheitel-
 punkt oder von der Spitze des Winkels C
 suche; denn der Sinus ED ist so gut
 der Sinus des Winkels DCG als es der

Dahero es
 gleichgültig,
 ob man den
 Sinus des
 Winkels in
 einem gro-
 ßen oder klei-
 nen Cirkel
 sucht.

Sinus GF ist; indeme der Bogen AE
 in Absicht auf die Anzahl seiner Grade so
 groß ist als der Bogen GD ; folglich muß
 auch der Sinus ED so viel Theile von
 seinem Sinus totus EC in sich begreifen,
 als der Sinus GF von dem seinigen, nem-
 lich von GC ; der Grund von diesem Satz
 ist schon anfangs gleich in der Geometrie
 vorgetragen worden, da wir gezeigt ha-
 ben, daß es gleichgültig seye, ob man
 mit einer kleinen oder grossen Eröffnung
 des Cirkels einen Winkel messe. Der

andere Fundamentalsatz, der zu wissen
 unumgänglich nöthig ist, heißt also: in
 einem jeglichen Dreyeck verhalten sich
 die Seiten zu einander, wie die Si-
 nus der den Seiten entgegen stehen-
 den Winkel. Durch Hülfe dieses wich-
 tigen Satzes werden hernach alle Trigo-
 nometrische Aufgaben nach der Regel
 tri aufgelöst. Wir wollen jezo den
 Satz selbst beweisen. Weil allemal durch
 drey Punkte ein Cirkel beschrieben werden
 kann, so kann auch um ein jedes Drey-
 eck, es mag beschaffen seyn, wie es will,

Zweiter Satz,
 daß in einem
 Dreyeck sich
 die Seiten zu
 einander ver-
 halten wie
 die Sinus
 der den Sei-
 ten entgegen
 stehenden
 Winkel,

Tab. III.
 Fig. 51.

ein

wird uns ein Cirkel beschrieben werden. Folglich wird, was von der 1. Fig. gesagt wird, von ähnlich er allen Dreiecken gelten. Wenn wir nun die Figur ansehen, so muß uns gleich aus der Geometrie einfallen, daß der Winkel ϕ zu seinem Maas den halben Bogen BC hat, worauf er steht; eben so wird m zu seinem Maas den halben Bogen AB , und n den halben Bogen AC haben. Nun fragt sich, weil wir die Sinus wissen wollen, was die Sinus dieser halben Bögen seien. Das muß uns nun ganz frisch noch im Gedächtniß seyn, daß der Sinus von dem halben Bogen BC die halbe Sehne BC , und der Sinus von dem halben Bogen AC die halbe Sehne AC , und der Sinus von dem halben Bogen AB die halbe Sehne AB seien; sie werden es also auch von den Winkeln ϕ , n und m seyn. Demnach müssen sich die Winkel zu einander verhalten wie die Sinus: diese aber sind die Helften der entgegen stehenden Sehnen oder Seiten. Folglich verhalten sich die Sinus wie die halbe Sehnen oder Seiten, demnach auch wie die ganze Seiten. Das ist in Zeichen:

$$\begin{array}{l} \phi = \frac{1}{2} BDC \text{ und } m = \frac{1}{2} AGB \text{ folglich} \\ \sin. \phi = \sin. \frac{1}{2} BDC \quad \sin. m = \sin. \frac{1}{2} AGB. \\ \frac{1}{2} BC = \sin. \frac{1}{2} BDC \quad \frac{1}{2} BA = \sin. \frac{1}{2} AGB. \\ \hline \sin. \phi = \frac{1}{2} BC. \quad \sin. m = \frac{1}{2} BA. \end{array}$$

Dem

$$\text{Demnach } \sin. o : \frac{1}{2} BC = \sin. m : \frac{1}{2} BA$$

$$\text{und } \sin. o : \sin. m = \frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} BA$$

folglich $\sin. o : \sin. m = BC : BA$.

Da nun die Seite BC dem Winkel o und die Seite BA dem Winkel m entgegen steht, so ist klar, daß sich in einem Dreyeck die Seiten zu einander verhalten, wie die Sinus der entgegenstehenden Winkel. Man begreift ohne unser Erinnern, daß man eben dieses von dem Winkel n und den Seiten BC und AC auf gleiche Weise demonstrieren könne. Wenn man sich diesen Satz recht bekannt macht, so wird man im folgenden keine Schwürigkeit mehr finden.

§. 181. Nunmehr können wir die gewöhnlichste und gemeinste trigonometrische Aufgaben erklären. Dann es sind noch verschiedene andere übrig, wozu man die Lehrsätze in meinem mathematischen Lehrbuch findet. Der erste und leichteste Fall ist, wenn man aus einer Seite und zween Winkeln, die einem gegeben werden, die übrige Stücke suchen solle. Den dritten Winkel darf ich nicht erst suchen, weil im geradelinichten Dreyeck der dritte Winkel allemal durch die nach Abzug der zween gegebenen Winkeln noch zu 180° fehlende Zahl bestimmt wird. Man sucht also nur die zwei Seiten; und sagt: wenn die Seite AC und die Winkel o und m gegeben,

Aus dem bisherigen werden nun die trigonometrische Aufgaben bestimmt;

Erster Fall, wie man aus zween Winkeln und einer Seite die übrige zwei Seiten eines Dreyecks finden solle,

Tab. III.
fig. 51.

h b

folgt

folglich auch der dritte Winkel z gegeben ist; so ist

$\sin. z : AC = \sin. o : BC$, daher

$$\frac{AC \sin. o}{\sin. z} = BC.$$

+

Das löst man hernach logarithmisch auf, damit man nicht mit so großen Zahlen multipliciren und dividiren darf; dahero diese Operation in eine Addition und Subtraction verwandelt wird. Folglich ist

$$\log. BC = (\log. AC + \log. \sin. o) - \log. \sin. z.$$

Diese Logarithme sucht man in den gedruckten Tafeln, und nach geschehener Berechnung wird die dem Logarithmus von BC correspondirende Zahl in eben diesen Tafeln wiederum gesucht. Wenn also AC der Diameter der Erde wäre, und zween Astronomen beobachteten die Sonne zu gleicher Zeit, der eine am Ende A und der andere am Ende C ; so würde, **Dieser leicht,** wenn sie die Winkel o und m , unter welchen sie die Sonne sahen, aufschreiben, **se Fall wird** die ganze Distanz oder Weite der Sonne **durch ein** von der Erde nach dem gemeldeten leicht **Exempel er-** ten Problem bestimmt und berechnet werden, **untert.** unerachtet noch kein Mensch von der Erde in die Sonne gekommen ist. Daß sich übrigens von dieser Gattung unendlich viel praktische Aufgaben vorlegen lassen, ist ohne unser Erinnern klar; wir wollen uns daher nicht damit aufhalten.

Der Dreyecke oder der Trigonom. 483

§. 182. Der andere Fall ist, wenn zwey Seiten und ein daneben liegender Winkel, wenn zwey Seiten und ein eingeschlossener Winkel, gegeben werden. Z. E. es seye gegeben AB , AC , und der Winkel n ; so ist nach §. 180. ein daneben

$$AC : \sin. n = AB : \sin. m,$$

folglich ist $\sin. m = \frac{\sin. n \cdot AB}{AC}$

liegender Winkel gege

Wenn ich aber den Sinus des Winkels n hab, so habe ich auch den Winkel; habe ich aber zwey Winkel m und n , so habe ich auch den dritten o ; will ich nun die Seite BC vollends wissen, so setze ich

$$\sin. n : AC = \sin. o : BC$$

das ist $\frac{AC \sin. o}{\sin. n} = BC.$

oder logarithmisch

$$l. BC = (l. AC + l. \sin. o) - l. \sin. n.$$

Hieraus siehet man, daß in der Trigonometrie ein Dreyeck aus zwey Seiten und einem Winkel gefunden werden könne, wenn auch der Winkel schon nicht eingeschlossen ist. An und vor sich selbst wird ein Dreyeck durch zwey Seiten und einen anliegenden Winkel nicht bestimmt. Dann es seye gegeben der Winkel CAB , ferner die Linie CA und CB ; so werde ich, wenn CAB ein spitziger Winkel ist, die Linie CB entweder in B unter einem stumpfen, oder in D unter einem spitzigen Winkel anbringen können, folglich entweder das Dreyeck

wiewerth man in der Trigonometrie aus zwey Seiten und einem daneben liegenden Winkel die übrigen Stücke bestimme

Tab. III. Fig. 58.

stimmen können, da man doch im ersten Capitel sagte, daß

§ 2

ACB

Dreieck ACB oder ACD bekommen, in welchem
 de nur als Fall es also scheint, daß die trigonome-
 dann be- trische Aufgabe nicht betrügen könne.
 stimmt, wenn trische Aufgabe nicht betrügen könne.
 die zwei Sei- Allein der Sinus des stumpfen Winkels
 ten den Win- ABC ist kein anderer, als der Sinus des
 kel einschließ- ADC ; dann weil CB
 sen;

wird um- nun ist o der Nebenwinkel von n , folglich
 ändlich be- wird ers auch von r seyn; der Sinus et-
 antwortet. nes stumpfen Nebenwinkels ist aber alle-
 mal so groß als der Sinus seines spizi-
 gen Nachbars; weil zweien Nebenwinkel
 etnerlen Sinus haben. Folglich fehlt die
 Trigonometrie hierinnen nicht. Nur muß
 man einem sagen, ob das Dreieck, in
 diesem Fall, davon die Rede ist, spizwink-
 licht oder stumpfwinklicht seye, weil sonst
 die gesuchte dritte Linie entweder zu groß
 oder zu klein würde. Ist es rechtwink-
 licht, so hat die Sache vorhin keine
 Schwierigkeit, wie aus der Figur und aus
 dem folgenden erhellen wird.

Dritter Fall,
 wenn zwei
 Seiten, die
 den rechten
 Winkel ein-
 schließen, ge-
 geben sind.

Tab. III.
 Fig. 57.

§. 183. Der dritte Fall heißt: wenn
 in einem rechtwinklichten Dreieck zwei
 Seiten, die den rechten Winkel einschließ-
 sen, gegeben sind, so solle man die übrige
 Winkel und Seiten finden. Die gege-
 bene Seiten seyen AB und AC ; folglich
 wird nach der Bedingung des Problems
 bey A ein rechter Winkel seyn. Wann
 ich nur die Seite AC für den Radius an-
 nehme, und den Bogen AD damit bes-
 schreibe

der Dreyecke oder der Trigonom. 485

schreibe, so wird die andere Seite AB die Tangente des Winkels n seyn; demnach, weil der Radius der Sinus totus ist, gebe es folgende Proportion:

$$AC : AB = \sin. tot. : Tangenz. n.$$

Dahero $\frac{AB \sin. tot.}{AC} = Tang. n.$

Da man nun aus der gegebenen Tangente in den berechneten Tafeln der Sinuum und Tangentium den correspondirenden Winkel findet, so läßt sich auch diese Aufgabe auflösen; indeme man nun nach § 187. fortfähret und sagt

$$\sin n : AB = \sin. tot. : BC.$$

Da dann $BC = \frac{AB \sin. tot.}{\sin. n.}$

§. 184. Ein anderer und etwas schwerer aufzulösender Fall ist derjenige, wenn einem zwey Seiten und der eingeschlossene spizige oder stumpfe Winkel gegeben werden. Es seyen im Dreyeck BCF gegeben BC , BF und der eingeschlossene Winkel c ; ich solle die zweyen übrige Winkel finden. Aus der Arithmetik wissen wir noch, daß man aus der halben Summe und aus der halben Differenz zweyer Grössen die Grössen selbst finden kann. Die halbe Summe der gesuchten Winkel ist bekannt, weil ihre ganze Summe bekannt ist; wir suchen dahero nun ihre Differenz; welche nichts anders seyn wird, als die halbe Summe weniger dem kleinern Winkel von

Vierter Fall, wenn zwey Seiten nebst einem spizigen oder

Tab. III.

Fig. 59.

stumpfen Winkel, den sie einschließen, gegeben sind.

Auflösung den gegebenen. Dann wenn die kleinere Grösse y heißt, und die Summe a , die Differenz aber b , so ist nach §. 129.

und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = y.$

folglich $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b + y$

Beweis. und $\frac{1}{2}a - y = \frac{1}{2}b.$

Das ist, die halbe Summe weniger die kleinere von den gesuchten Grössen ist die halbe Differenz. Wenn also BCF der grössere von den gesuchten Winkeln ist, so wird CFB der kleinere seyn, folglich die halbe Differenz heißen

$$\frac{BCF + CFB}{2} - CFB; \text{ oder, damit wir nicht}$$

so viel schreiben dürfen, wenn wir den grössern Winkel $o + r$ und den kleinern s heißen, so ist die halbe Differenz

$$\frac{(o + r) + s}{2} - s. \text{ Diese wollen wir jetzt}$$

suchen. Man verlängere BF bis A , und mache $BA = BC$. Ferner schneide man von BF die Linie $BE = BC$ ab; so wird ACE ein rechter Winkel seyn, weil ein halber Winkel um ihn beschrieben werden kann, auf dem er aufsteht, und an dessen Peripherie er sich endiget; indeme $BA = BC = BE$ als Radii ihn bestimmen. Man ziehe ferner mit CE die Parallele mit DF aus dem Punkt F , so wird auch bei D ein rechter Winkel seyn. §. 146. Endlich weil $BA = BC$, so wird die Linie AF

$AF = BC + BF$ die Summe der gegebenen Seiten, und $EF = BF - BE = BF - BC$ ihre Differenz seyn. Nun wird sich die halbe Differenz der Winkel bald ergeben: dann es ist

$$m = (o + r) + s \quad \S. 147.$$

$$m = o + n \quad \S. \text{cit.}$$

$$(o + r) + s = o + n$$

$$o = n \quad \S. 145.$$

$$(o + r) + s = 2n.$$

: 2

$$\frac{(o + r) + s}{2} = n = \text{halbe Summe:}$$

$$s + p = n \quad \S. 146.$$

$$\frac{(o + r) + s}{2} = s + p.$$

$s = s$ der kleinere Winkel.

$$\frac{(o + r) + s}{2} - s = p. \text{ halbe Differenz;}$$

also ist der Winkel p oder CFD die halbe Differenz der gesuchten Winkeln; wenn wir also die Grösse dieses Winkels wissen, so werden wir die gesuchte Winkel leicht finden können. Das Anschauen der Figur bringt uns auf folgende Proportion:

$$AF : EF :: AD : CD.$$

Das ist in Worten ausgedruckt: die Summe der Seiten zur Differenz der Seiten wie AD die Tangente von der halb

§ 4

ben

ben Summe der gesuchten Winkel (dann $s + p = n$ und n ist die halbe Summe) zu CD der Tangente des Winkels p oder der halben Differenz. Da nun die drey ersten Linien bekannt sind, so findet man auch die vierte; folglich auch den dieser Tangente correspondirenden Winkel p ; welcher die halbe Differenz ist; da dann $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}p = (o + r)$ und $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}p = s$ nach §. 129. gefunden wird. Sind aber die Winkel gefunden, so wird die übrige Seite CF nach §. 181. sich leicht bestimmen lassen.

Fünfter Fall, §. 185. Es ist noch ein Fall übrig, wenn drey Seiten gegeben werden, aus welchen man die drey Winkel suchen solle. Und das ist der letzte Fall: Man begreift ohne unser Erinnern von selbst, daß die drey gegebene Seiten einander ungleich seyen; dann wenn sie gleich wären, so würden sich die gesuchte Winkel ohne weitere Trigonometrische Rechnung aus §. 147. leicht bestimmen lassen. Die Aufgabe hat also vornemlich ungleichseitige Dreyecke zu ihrem Augenmerke, unerachtet übrigens auch die gleichseitige dadurch aufgelöst werden können, wenn man eine langwierige und beschwerliche Rechnung einer kurzen und leichten vorziehen will. Es sehen demnach in dem Dreyeck ACB die Seiten AC , CB , und BA gegeben, man solle die Winkel suchen. Dies

Tab. III.
Fig. 55.

ses zu bewerkstelligen, muß man den aus der 53. Fig. leicht zu beweisenden Lehrsatz sich bekannt machen, daß nemlich seye

Tab. III.
Fig. 53.

$$CB:CD = CG:CF.$$

Dann wenn wir bewiesen haben, daß $o = y$, so hat die Sache ihre Richtigkeit, weil der andere Winkel FCG beeden Dreyecken CBD und CGF gemein ist. Das erstere läßt sich leicht beweisen.

$$x = \frac{FBD}{2} \quad \S. 148.$$

$$y = \frac{FGD}{2} \quad \S. cit.$$

$$x + y = \frac{FBD + FGD}{2} \quad \S. 9.$$

$$\frac{360^\circ}{2} = \frac{FBD + FGD}{2}$$

$$x + y = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \quad \S. 9.$$

Auflösung

$$o + x = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \quad \S. 141.$$

$$x + y = o + x \quad \text{folglich} \\ \hline \S. 9.$$

und

$$x = x$$

$$y = o.$$

Wir haben also bewiesen, was wir beweisen wollten. Wann man nun in der 55. Fig. aus dem Punkt C des Dreyecks ACB mit dem Radius CB einen Circle beschreibt, so ist $CD = CB = CH$; folglich AD die Summe zweyer Seiten und

Tab. III.
fig. 55.

Beweis.

§ 5

AH

AH ihre Differenz. Da nun nach dem erstgemeldten Lehrsatz

$$AB:AD = AH:AF.$$

Das ist die Grundlinie des Dreyecks zur Summe der zwei übrigen Seiten, wie ihre Differenz zum Stück *AF*, so läßt sich *AF* durch die Regel Detri, folglich auch $FB = AB - AF$ leicht finden. Wenn man nun aus *C* einen Perpendikel auf *FG* herabfällt, so ist $FG = GB$ §. 151. und bey *G* ein rechter Winkel. Demnach findet man den Winkel *GCB*, wenn man sagt §. 183.

$$CB:\sin. 90 = GB:\sin. GCB.$$

Hat man aber den Winkel *GCB* gefunden, so hat man auch den Winkel *GBC* §. 165. Eben so sucht man den Winkel *ACG*, weil $AC:\sin. 90 = AG:\sin. ACG$; folglich ergibt sich der dritte Winkel *CAB* von selbst. Man kann also aus einer Seite und zween Winkeln, aus zwei Seiten und einem Winkel, und endlich aus drey Seiten die übrige drey Stücke eines Dreyecks nach den Trigonometrischen Lehrsätzen richtig finden.

§. 186. Wir haben nunmehr alles gesagt, was wir in der Trigonometrie zu sagen gesonnen waren. Weil wir aber versprochen, hier dasjenige noch kürzlich nachzuholen, was je und je sonst in der Geometrie von den sogenannten

Von dem
grossen Ru-
gen der Tri-
gonometrie

ten Meßtrischlein und andern Mitteln, un- in der prakti-
 zugängliche Weiten und Höhen abzumef- schen oder
 sen, gesagt und vorgetragen wird, so schießen oder
 wollen wir das praktische davon nur kurz ansühendem
 lich noch berühren. Die Hauptsache be- Mathemas-
 steht darinnen, daß man eine Linie und til.
 ein paar Winkel, oder umgekehrt einen
 Winkel und ein paar Linien misst. Dies
 se zwei Aufgaben, besonders die erste,
 kommen am öftesten vor. Nun wird man
 allemal, man mag messen, was man will,
 auf dem Erdboden so viel Raum bekom-
 men, daß man eine Linie messen kann.
 Mit den Winkeln hat es eine gleiche Be-
 schaffenheit. Schreibt man nun den In-
 halt der Linien und Winkel auf, so kann
 man die gesuchte Linien daheim bey guter
 Muffe trigonometrisch berechnen, ohne
 daß man andere Mittel dazu nöthig hät-
 te. Ich habe schon gemeldet, daß die
 leichteste Trigonometrische Aufgab am
 meisten gebraucht werde; die Höhe eines
 Thurmes, zu dem man nicht einmal kom-
 men kann, die Weite zweyer unzugäng-
 licher Dörter, die größte Entfernung der
 Sterne u. s. w. lassen sich durch diese sim-
 ple Aufgabe leicht bestimmen, wie wir
 schon §. 181. ein Exempel dithfalls gege-
 ben haben. Kommen aber auch solche
 Fälle vor, wo man aus zwei Seiten und
 einem eingeschlossenen Winkel oder auch
 aus drey Seiten die übrige Stücke finden
 sollte,

solle, so haben wir ja die Art und Weise, wie man hie zu Werke geht, ebenfalls umständlich vorgetragen. Die besondere und praktische Hülfsmittel durch Transporteur, Astrolabien, Quadranten, u. s. w. gehören zur ausübenden Mathematik; die Arbeit wird dadurch erleichtert und die Rechnung zuverlässiger; in der Theorie aber geben dergleichen Instrumente an und vor sich selbst kein größeres Licht. Aus diesem Grunde glauben wir, daß die Absicht unserer gegenwärtigen Arbeit keine umständliche Nachricht von der Instrumentenlehre erfordere, daher wir auch dieses Capitel, ohne den Vorwurf, etwas nöthiges übergangen zu haben, so beschließen dürfen.



III. Cap.

Von den Kegelschnitten und andern krummen Linien.

§. 187.

Die Kegelschnitte sind von Alters her immer ein Gegen-

Unter allen krummen Linien haben die sogenannte Kegelschnitte oder Conische Sectionen je und je eine Hauptbeschäftigung der Mathematikverständigen ausgemacht. Die meiste Mühe hat sich

sich Apollonius von Pergen, dithfalls gegeben, und seinen Nahmen durch diese Arbeiten bey der Nachwelt verewiget. Aus dem ersten Capitel dieses zween- theils muß es unsern Lesern noch bekannt seyn, was ein Conus oder Kegel seye. Die 48. und 65. Fig. stellen einen vor. Nun kann man ihn mit einer Fläche auf verschiedene Weise schneiden. Gehet die schneidende Fläche durch den Scheitelpunkt D , so entsteht das Dreyeck DBC , folglich eine geradelinichte Figur; gehet sie mit der Grundfläche BGC parallel, so bekommt man einen Cirkel; welcher auch erzeugt wird, wenn man einen Scalenschen oder ungleichseitigen Kegel also schneidet, daß der Winkel, den der Diameter des Durchschnit-tes mit der einen Seite des Kegels bestimmt, eben so groß wird, als der Winkel, den die andere Seite des Kegels mit dem Diameter seiner Grundfläche macht. Ein solcher Schnitt heißt *sectio subcontraria*, und wird vornemlich bey den perspectivischen und astronomischen Projectionen genühet. Weil nun durch diese drey Gattungen von Durchschnitten theils geradelinichte Dreyecke, theils Cirkel erzeugt werden, so gehören sie nicht zu den eigentlichen Kegelschnitten, indeme die lehre von den Dreyecken so wohl als von den Cirkeln in dem ersten Cap. der Geom. abgehandelt wurde. Es

stand der Mathematik gewesen;
Was ein Kegel oder Conus seye, und auf wie vielerley Weise er geschnitten werden könne;
Tal. IV. Fig. 65.
Erste Art des Schnitts, wodurch ein geradelinichtes Dreyeck entsteht.
zweite und dritte Art welche auch *sectio subcontraria* heißt, und wodurch Cirkel entstehen.
Warum diese drey Arten zu den eigentlichen Kegelschnitten, wovon in diesem Capitel

gibt

die Rede ist, gibt aber noch drey andere conische Sectionen, welche in diesem Capitel ihre eigene Stelle erhalten.

Vierte Art, **Fig. 65.** **Tab. IV.** wodurch eine Parabel entsteht; Regel auch also schneiden, daß die Axe des Durchschnit-
 Ah mit der entgegenstehenden Seite des Kegels DC entweder allezeit parallel bleibt, oder daß sie diese Seite unter einem beliebigen Winkel innerhalb der Spitze des Kegels durchschneidet, oder daß sie endlich mit der über die Spitze D verlängerten Seite, wenn sie gleichfalls verlängert wird, sich zuletzt vereinigt.

Im ersten Fall entstehet eine Parabel, im zweyten eine Ellipsis, im dritten eine Hyperbel. Den Ursprung dieser Nahmen wollen wir im folgenden erklären.

Tab. IV. §. 188. Wir reden zuerst von der **Fig. 65. Parabel.** Wenn ein Regel so geschnitten wird, daß die Axe des Durchschnit-

tes Ah mit DC parallel, und die Linie Gh mit dem Diameter der Grundfläche AC einen rechten Winkel in h macht, so heißt man die Figur $AMGh$ eine Parabel. Nun wollen wir sehen, was diese Figur für Eigenschaften habe. Man mache in einem beliebigen Punkt E einen mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt EMF , so wird man einen Cirkel bekommen, weil die Grundfläche ein Cirkel ist. Demnach wird auch PM mit Gh parallel, und folglich kraft der Natur des Cirkels

Wie man die Eigenschaft der Parabel aus Betrachtung

seyn $PM^2 = PE \cdot PF$. Nun sind die zwei Dreiecke DCB und APE einander ähnlich. Folglich ist $DC : BC = AP : PE$ und also $\frac{BC \cdot AP}{DC} = PE$.

Dahero, wenn man gleiches für gleiches substituirt, so hat man

$$PM^2 = \frac{AP \cdot BC \cdot PF}{DC}$$

Wenn man ferner aus dem Punkt A mit der Grundlinie eine Parallellinie AN zieht, so ist $AN = PF$, weil sie parallel sind, und zwischen einerley Parallellinien stehen. Da nun nach dem Grundsatz der Ähnlichkeit $DB : BC = DA : AN$, so ist $AN (=PF) = \frac{BC \cdot DA}{DB}$ folglich wenn man abermal gleiches für gleiches setzt,

$$PM^2 = \frac{AP \cdot BC \cdot BC \cdot DA}{DC \cdot DB} = \frac{AP \cdot BC^2 \cdot DA}{DC \cdot DB}$$

da nun der Punkt M nach Belieben angenommen werden kann, so wird die Gleichung auch bey einem jeden andern Punkt M annehmen, und allemal das Quadrat von PM , oder $PM^2 = AP \cdot \frac{BC^2 \cdot DA}{DC \cdot CB}$; und

weil die Linien BC , DA , DC und CB unverändert bleiben, der Punkt M mag angenommen werden, wo man will, so kann man eine beständige Linie dafür setzen, beständige oder

tung des Ra-
gels, woraus
sie geschnit-
ten wird, be-
stimmen
könne.

und beson-
ders wie man
den Parame-
ter finde, und
augenschein-
lich überzeu-

und unveränderliche oder selbige durch die Regel Detri suchen, wenn man sagt:

wie seye. $DC \cdot DB : BC^2 = DA : AK$, der vier-

Allgemeine
Eigenschaft
der Parabel.

Ursprung des
Worts oder
Nahmens
Parabel;

wie auch der
Ellipsis und

ten Proportionallinie, welche AK seyn solle. Demnach wird $AK \cdot AP = PM^2$. Diese beständige und unveränderliche Linie AK haben die Alten das *latus rectum*, die Neuere aber den Parameter genannt. Die Linie PM heisst die Semiordinate, und AP die Abscisse. Wenn man nun die Semiordinate PM immer y , die Abscisse aber x und den Parameter a nennet, so ist $ax = y^2$; und das ist die beständige Eigenschaft der Parabel; woraus sich auch der Ursprung dieses Nahmens erklären läßt. Dann man siehet bey diesen Gleichungen auf die Verhältnisse des Rectanguli aus dem Parameter in die Abscisse zum Quadrat der Semiordinate. Wenn das Rectangulum aus AK in AP , oder in der Figur, $AKOP$, dem Quadrat von PM , oder PM^2 , gleich ist, so drückt der griechische Name Parabel diese Gleichheit aus. Wie deswegen auch in der Rhetorik, wiewohlen in einem andern Verstand, die Parabel ein Gleichniß heisset. Eben so, wenn das Quadrat von PM kleiner ist als das Rectangulum $AKOP$, oder $AP \cdot AK$, so fehlet noch was zur Gleichheit, folglich heisst eine solche Figur eine Ellipsis; und wenn endlich das Quadrat von PM grösser ist als

als das Rectangulum $AP \cdot AK$, so ent. der Distanz
 steht eine Hyperbel, (ein Excessus); Das ist
 ist der Ursprung dieser Rahmen, welche
 nun leicht zu verstehen seyn, wenn man
 das vorgetragene mit Bedacht gelesen hat,
 und dabey ein wenig griechisch versteht.

§. 189. Wir haben uns bemühet, Warum man
 Anfängern zu gefallen, eine umständliche von dem Parameter und
 Beschreibung von dem Parameter zu geben, dessen Be-
 den. Manche können sich in die algebraische Stimmung so
 brautische Aequationen dieser Art nicht so ausführlich
 gleich finden; weil sie den Parameter und woher es
 nicht deutlich in der Figur sehen, da sie kommen, das
 doch alle andere Linien, z. E. die Abscissen, wegen dieser
 sen, die Semiordinaten, die Ape, den nicht so leicht
 Diameter, u. s. w. sehen; Dahero wir fallender Linien
 glauben, uns mit dieser Lehre nicht ohne die sie und
 Noth aufgehalten zu haben. Doch wol, da Schwär-
 len wir bey der Ellipsis und Hyperbel uns den. rigkeiten aus-

kürzer dinstfalls ausdrücken, und nur so
 viel melden, daß die beständige aber nicht Warum man
 so sichtbar in die Augen fallende Linie, aber doch im
 welche der Parameter heißt, auf eine ähnlichen folgenden
 liche Weise bey diesen beiden Figuren ge- sich kürzer
 funden werden könne. Dahero wird die ausdrücken
 Einbildungskraft im folgenden keine Ein-
 wendungen mehr machen, wenn wir
 gleich nicht allemal den Parameter vor
 ihre Augen hinstellen werden.

§. 190. Jetzt betrachten wir die Re. Wie man die
 gelschnitte als algebraische Linien, außer als alge-
 der Verhältniß, die sie mit dem Regel hat brautische Li-
 nen.

nicht betrach-
ten; ben, woraus sie geschnitten sind. Man
muß sich aber die dabey vorkommende
Nahmen und ihre Erklärungen wohl be-
kannnt machen. Der Diameter einer
krummen Linie ist diejenige gerade Linie,
durch welche alle von einem Punkt der
krummen Linie zum andern gezogene ge-
rade Parallellinien in zween gleiche Thei-
le getheilet werden. Geschiehet diese
Theilung unter einem rechten Winkel, so
heißt der Diameter die Axc. So ist z.
E. die Linie AH die Axc der Parabel

Tab. IV. ANM , die Linie AB die Axc der Ellipsis
Fig. 66. $AMNB$ u. s. w. dann wenn die krumme
Fig. 68. Linie in Gedanken auf der andern Seiten,
wie in der 67. Fig. um die Axc vollends
herumbeschrieben wird, so würde eine
eben so grosse Linie als PM unter einem
gleichen Winkel bis an den entgegen ge-

Tab. IV. setzten Punkt der krummen Linie gezogen
Fig. 67. werden können; da dann $PM = Pm$ wie
 $PR = Pr$. Eine solche ganze Linie z. E.

Erklärung der Ordina-
ten und Semiordinaten; Mm heißt die Ordinate, und ihre Helfs-
te PM die Semiordinate; sie mag hers-
nach durch die Axc oder durch einen Dia-
meter überhaupt in zween gleiche Theile
ben P abgeschnitten worden seyn. Wir
werden aber vornemlich die Semiordina-
ten in Rücksicht auf die Axen betrachten,
mit welchen sie rechte Winkel machen.
Tab. IV. So sind FN , PM , Pm Semiordinaten,
Fig. 65. 66. 67. 68. 69. welche alle, sie mögen auf den Diameter
oder

oder auf die Ase gezogen werden, parallel seyn, nur aber im letztern und gewöhnlichsten Fall, wenn man sie auf die Ase ziehet, die Ase unter rechten Winkeln schneiden müssen. Es ist noch eine Linie übrig, welche zu wissen gleich nöthig ist, nemlich die Abscisse. Sie ist allemal ein Theil entweder des Diameters oder der Ase, und wird durch die Semiordinate und den Scheitelpunkt der krummen Linie, von welchem man den Diameter zu ziehen anfängt, oder auch durch einen andern angenommenen festen Punkt bestimmt. So sind die Linien AF , AP , Ap in den schon angeführten Figuren Abscissen, in so ferne man sie von dem Scheitelpunkt A zu zählen anfängt. Allein die Linien CP , CF , in der 68. Fig. und CD in der 37. Fig. können auch als Abscissen angesehen werden, in so fern sie von dem Mittelpunkt C angerechnet werden. Wie man die Semiordinaten in den Figuren gemeiniglich PM , und die Abscissen AP schreibt, so werden in den algebraischen Rechnungen, wofern nichts besonders angemerkt wird, jene allemal y und diese x genannt. Folglich wird in der Gleichung für die Parabel, wenn der Parameter a ist, der Ausdruck $a \cdot AP = PM^2$ algebraisch geschrieben $ax = y^2$. Diesen Ausdruck muß man sich vorzüglich bekannnt machen; weil alle Algebraisten das

Was die Abscissen einer krummen als gebr. Linie seyen; und wie die Abscissen theils vom Scheitelpunkt, theils Tab. IV. Fig. 68. Tab. II. Fig. 37. von einem andern beliebigen Punkt, d. E. von dem Mittelpunkt gerechnet werden können.

Mit was für Buchstaben die Abscissen und Semiordinaten gemeiniglich ausgedruckt bey werden;

Darum sie
veränderliche
Linien hei-
ßen;
und was un-
veränderli-
che oder be-
ständige
Größen
seyen;

Tab. IV.
Fig. 66.

ben bleiben, und die Abscissen x die Semiordinaten aber y nennen. Beide heißen man auch veränderliche Größen (quantitates variables) in Rücksicht auf die unveränderliche Größen (quantitates constantes) dergleichen z. E. im Cirkel der Radius, in den conischen Sectionen der Parameter u. s. w. ist. Daß aber die Abscissen und Semiordinaten wirklich veränderliche Größen seyen, erhellet aus den Figuren. Z. E. die Abscisse AF ist kleiner als AP , darum correspondirt der ersteren auch eine kleinere Semiordinate FN als der letzteren, nemlich PM . Dem ungeachtet bleibt der Parameter bey AF so groß als bey AP , und wird im geringsten nicht verändert. Die übrige Erklärungen von einigen noch zu bestimmenden Linien wollen wir an ihrem Ort gehörig anbringen, damit wir unsere Leser nicht auf einmal mit so vielen Definitionen ermüden.

Einige Fol-
gen aus der
Gleichung
für die Para-
bel;

§. 191. Die erste krumme Linie, die von den conischen Sectionen abhängt, ist die Parabel. Nun haben wir §. 187. schon bewiesen, daß bey dieser Linie $ax = y^2$ oder $a \cdot AP = PM^2$, das ist, daß das Product aus der Abscisse in den Parameter dem Quadrat der Semiordinate gleich seye; wir dürfen daher diese Fundamentalgleichung jetzt zu Grunde legen, und das weitere daraus schließen. Weil

ax

$ax = y^2$, so ist, wenn man beiderseits

mit a dividirt, $x = \frac{y^2}{a}$, und wenn man

mit x dividirt, $a = \frac{y^2}{x}$, und wenn man

die Quadratwurzel beiderseits ausziehet, $\sqrt{ax} = y$. Diese Ausdrücke folgen unmittelbar aus der Gleichung, und werden uns im folgenden zu statten kommen.

Wir gehen aber weiter, und führen jezo eine wichtige Eigenschaft der krummen Linien dieser Art an. Eine jede solche Linie muß in ihrer Ase einen Punkt haben, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist. Ein solcher Punkt wird der Brennpunkt genannt (focus). Der Ursprung dieses Namens gründet sich auf die optische Wissenschaften, weil nemlich alle Strahlen in einem parabolischen Spiegel u. s. w. gegen diesen Punkt gebrochen, folglich darinnen gesammelt werden, und eine Hitze verursachen, welche den Namen eines Brennpunktes wohl verdient. Nun begehrt man zu wissen, wie weit es von dem Scheitelpunkt der Ase, nemlich von A zu diesem Brennpunkt in der Parabel seye? Es seye der gesuchte Punkt F ; so wird nach der gegebenen Erklärung die Semiordinate FN dem halben Parameter gleich seyn; da wir nun bey der Parabel den Parameter a nennen, so finde,

S i s

ist

Von dem Brennpunkt einer krummen Linie, und warum derjenige Punkt der Abscisse, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt genannt werde, wird aus dem optischen Wissenschaften erläutert.

Tab. IV.
Fig. 66.

Wie man den Brennpunkt der Parabel

ist $FN = \frac{1}{2}a$; AF ist eine Abscisse, welche folglich, wie alle Abscissen, x heisset. Da nun $ax = y^2 = FN^2$, so wird, wann man gleiches für gleiches setzt, im gegenwärtigen Fall seyn

$$ax = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{weil } \frac{1}{2}a = FN \text{ und das Quadrat von } \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2.$$

Demnach

$$\text{---} : a \\ x = \frac{1}{4}a;$$

das ist, die Distanz des Brennpunkts vom Scheitelpunkt der Ase ist in der Parabel dem vierten Theil des Parameters gleich. Verlangt man ferner zu wissen, wie groß die vom Brennpunkt F bis an das Ende einer Semiordinate M gezogene Linie FM seye, so wird sich ihre Größe durch folgende Rechnung leicht bestimmen lassen: wenn $AP = x$, so ist PF

Wie groß ist $= AP - AF = x - \frac{1}{4}a$; wenn nemlich AP größer als AF , oder die Abscisse über den Brennpunkt hinaus geht.

Nun ist nach den geom. Lehrsätzen des ersten Capitels §. 159. $PM^2 + PF^2 = FM^2$, weil bey P ein rechter Winkel; das gibt in Buchstaben folgende leichte Rechnung

$$\begin{array}{l} PM^2 = ax \\ PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2 \quad \text{dieses addirt} \\ \hline FM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax + \frac{1}{4}a^2 \quad \text{gibt} \\ \hline FM = x + \frac{1}{4}a. \quad \text{folglich} \end{array}$$

Diese

Diese Linie FM ist also allemal gleich $AP + AF$, das ist, der Abscisse AP und der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt AF zusammen genommen; und eben so groß ist die Linie TF , und die Linie FH , wie wir im vierten Cap. bewiesen werden, wenn wir von den Tangenten, Subtangenten und Subnormalen der krummen Linien reden, und den Beweis weit kürzer fassen können, als er sich jetzt ausdrücken ließe. Diß ist alles, was wir in dem gegenwärtigen Cap. von der Parabel sagen wollten. Dann daß es Parabeln von höhern Gattungen geben könne, ist ohne unsern Erinnerung klar. Die Fundamentalgleichung führt uns von selbst darauf; weil $ax = y^2$, so sieht man schon, daß die Potenz von a um eins geringer ist, als die von y ; folglich wird $a^2x = y^3$ und $a^3x = y^4$ u. s. w. Demnach mit allgemeinen Ausdrücken $am-1x = y^m$. Ein solcher Ausdruck begreift das ganze Geschlecht der krummen Linien in sich, welche alle Parabeln genannt werden. (familia curvarum.) Dergleichen höhere Gattungen aber lassen sich durch in gegebenen Verhältnissen zu ziehende gerade Linien eben so construiren, wie die niedrigste, wie es Herr Baron von Wolf in den Actis Erud. gezeigt hat. Endlich begreift man auch, daß die Sache eben so wenig Schwürigkeit habe,

Parabola exterior, wenn der convexe Theil der Parabel gezogen die innere gerade Linie, dergleichen die 71. Fig. ausweist, gelehret wird. Eine solche Gleichung heißt *aquatio ad parametrum exteriorem*.

Tab. IV. Fig. 71. *holam exteriorem*.

Erklärung der Ellipse, §. 192. Die Ellipse ist eine solche krumme Linie, in welcher das Quadrat der Semiordinate oder PM^2 gleich ist dem Producte des Parameters in die Abscisse, weniger dem durch die Ape dividirten Product des Parameters in das Quadrat der Abscisse. Und eben deswegen, weil von dem erstern Product etwas abgezogen wird, heißt diese krumme Linie eine Ellipse; wie wir gezeigt haben. Die Gleichung ist wie bey der Parabel, was die Buchstaben betrifft; nur müssen wir erinnern, daß bey der Ellipse und auch hernach bey der Hyperbel zwei beständige Linien, nemlich die Ape und der Parameter vorkommen. Nun wäre es gut, wenn man den Parameter, wie bey der Parabel, immer a , die Ape aber mit einem andern Buchstaben b genannt hätte.

Tab. IV. Fig. 68. Die meiste Abgebrauchten aber und unter diesen besonders Herr Wolf nennen den Parameter hier b und die Ape a . Da wir nun keine Neuerung anfangen, und auch denjenigen Lesern nicht mißfallen wollen, welche aus den Wolfischen Schriften schon diese Lehre sich bekannt gemacht haben, so merken wir hier an, daß bey den Ellipse

aus der Natur der Gleichung gezeigt. Bey der Ellipse kommen zwei beständige Linien vor. Warum man den Parameter der Ellipse und Hyperbel mit einem andern Buchstaben als den Parameter der Parabel bezeichne?

damit man deutlich bey

und andern krummen Linien. 505

elliptischen und hyperbolischen Figuren der den angegebenen Parameter allemal b und die Axe a heisset. ^{nommenen} ^{Gewohnheit} Demnach ist die Gleichung für die Ellipse in Buchstaben ausgedruckt, die sol: ^{kräftigen} ^{klein} ^{be;} gende:

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}; \text{ das ist in der}$$

Figur, wenn wir nur den Buchstaben b ^{Grundmens} für den Parameter, den wir hier nicht ^{als Gleichung} mehr wie in der Parabel, um nicht zu ^{der Ellipse} weitläufig zu werden, ausdrücklich zeichnen, beibehalten:

$PM^2 = b \cdot AP - \frac{b \cdot AP^2}{AB}$. Wenn nun ^{wie sie auf} die Axe dem Parameter gleich ist, so ist ^{den} ^{Einkel} $b = AB$, folglich ^{angewandt}

$$PM^2 = AB \cdot AP - \frac{AB \cdot AP^2}{AB} \text{ das ist werde, und}$$

$PM^2 = AB \cdot AP - AP^2$ oder ^{schicklich} ^{wiederne} ^{des} ^{cher} ^{ausgedruckt} ^{nach} ^{§. 60.} ^{Einkel} ^{eine}

$PM^2 = (AB - AP) AP$. Welches die ^{Ellipses} ^{Formel} Gleichung für den Einkel ist; weil in diesem Fall die Proportion sich ergibt:

$$AP : PM = PM : AB - AP = PB,$$

das ist: $x : y = y : a - x$ folglich $y^2 = ax - x^2$ wie wir im ersten Capitel §. 162. gezeigt. Der Einkel ist also nichts anders als eine Ellipse, deren Axe und Parameter einerley sind. Um aber wieder auf die Ellipse zu kommen, so siehet man leicht, daß diese krumme

Wie man beweisen könnte, dass die Ellipse sich, wie die Parabel ins unendliche fortgehet, sondern sich um ihre Axe herumbewegt, und wie die Eirkelförmige schliesset. Dann weil $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, so

wird, woferne man $y^2 = 0$ setzt, auch folglich, wenn man beiderseits $\frac{bx^2}{a}$ addirt, wie der Eirkel, zuletzt

$$bx - \frac{bx^2}{a} = 0$$

schließen

$$bx = \frac{bx^2}{a}$$

müsse;

$$abx = bx^2$$

$$: bx$$

$$a = x.$$

Hieraus ist klar, daß die krumme Linie die Axe zweymal, nemlich in A und B schneiden müsse, weil sonst in dem Fall, daß $y^2 = 0$ die Abscisse oder x nicht AB oder a gleich werden könnte.

Warum eine Ellipse zwei Axen, eine grössere und kleinere habe? diese beiden erklärt;

§. 193. Die Ellipsis hat zweyerley Axen, eine grosse und eine kleinere; die grössere ist AB , die grösste gerade Linie, die von einem Punkt der krummen Linie zum andern gezogen werden kann; oder der grösste Diameter ist die grössere Axe. (Axis major;) Wenn ich nun die grössere Axe in zween gleiche Theile in C theile, und die Perpendicularlinie oder Semiordinate CD ziehe, so ist CD die Helfte der

klei-

kleinern Ase; welche gegen die andere Seite der Elliptischen Linie continuirt, die kleinere Ase ganz gibt. In diesem Falle ist nun die Abscisse $AC = \frac{1}{2}a$; daher die Gleichung für die kleinere Ase bald gefunden wird. Dann weil die Ellipsis überhaupt folgende Eigenschaft hat, daß $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ so darf man nur für die Abscisse x überall $\frac{1}{2}a$ substituiren; da sich dann ergibt

$$y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{1a^2b}{4a} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab.$$

Nun ist y in diesem Fall die Hälfte der kleinern Ase oder CD , folglich ist

$$CD^2 = \frac{1}{4}ab \text{ daher}$$

$$CD = \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}. \text{ und}$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \cdot 2$$

$$2CD = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{ab}.$$

Das ist, die kleinere Ase $= CD$ ist die Quadratwurzel aus dem Product des Parameters in die größere Ase; oder, weil $a:\sqrt{ab} = \sqrt{ab}:b$, so ist die kleinere Ase die mittlere Proportionallinie zwischen der grössern Ase und dem Parameter.

§. 194. Nun wollen wir auch die Weite des Brennpunktes von dem Scheitelpunkt der Elliptischen Ase suchen. Der Brennpunkt ist allemal da, wo die Ses-

Tab. IV.
Fig. 68.

Die kleinere Ase ist die mittlere Proportionallinie zwischen der grössern Ase und dem Parameter;

Tab. IV.
Fig. 68.

Wie man den untern Ordinate dem halben Parameter gleich
Brennpunkt ist. Er seye in F , so ist die Semitor-
der Ellipse te $FN = \frac{1}{2}b$ und $AF = x$; folglich nach
der Elliptischen Fundamentalgleichung
finden und
bestimmen
könne;

$$\frac{1}{4}b^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$$

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$$

$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

Dahero auch wenn
man beedersseits glei-
ches addirt und sub-
trahirt, oder die Zei-
chen verändert,

$$-\frac{1}{4}ab = -ax + x^2 \quad \text{eine unreine qua-} \\ \text{dratische Glei-} \\ \text{chung; folglich} \\ \text{addirt, gibt}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2, \text{ dahero}$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}a - x \quad \text{und}$$

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}.$$

Wenn also $= b$, und die Ellipse ein
Kreis wird, so ist

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \frac{1}{2}a.$$

Folglich fällt der Brennpunkt, wie es
auch die Erfahrung lehret, gerade in den
Mittelpunkt C . Ferner wird bey der El-
lipse die Distanz des Brennpunktes von
dem Mittelpunkt $C = CF = AC - AF =$
 $\frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} =$
 $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$ seyn; wie man aus der Fi-

gure

gar leicht ersiehet. Da es nun auf beyden Seiten der Ase von C aus zween dergleichen Distanzen nemlich FC und fC gibt, so hat die Ellipsis zween Brennpunkte F und f , welche bey dem Cirkel in C zusammen fallen. Uebrigens fließet aus der Betrachtung der beeden Brennpunkte noch eine schöne Eigenschaft der Ellipsis, welche darinnen besteht, daß die Summe der beeden aus dem Brennpunkt F und f um einen Punkt der Peripherie gezogenen geraden Linien FM und fM allemal der größern Ase AB gleich seye. Eine Eigenschaft, die wir jeko beweisen wollen, wenn wir vorhero gezeigt haben, wie sich die Quadrate zweer Semiordinaten gegen einander verhalten.

§. 193. Man betrachte die zwe Semiordinaten PM , und CD , davon die letztere die Helfste der kleinern Ase ist, und nenne sie y und v ; die correspondirende Abscissen heiße man x und z ; davon letztere $= AC$ die Helfste der größern Ase ist; so wird nach der Fundamentalgleichung

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \quad \text{und}$$

$$v^2 = bz - \frac{bz^2}{a}, \quad \text{folglich}$$

$$y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$$

Tab. IV.
Fig. 68.

Die Summe zweer aus dem beeden Brennpunkten der Ellipse gezogenen geraden und an der Peripherie in

$y^2 :$

§ 10 Geom. III. Cap. Von Kegelschnitt.

sammen flos- $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2$
 fender Linien $y^2 : v^2 = ax - x^2 = az - z^2.$: b

ist allemal ei- Wenn man nun die in der Figur gezeich-
 nerley oder nete Linien dafür setzet, so hat man
 gleich groß, $PM^2 : CD^2 = AP . PB : AC^2$,
 und der größ- oder versetzt nach §. 80.

seren Axe $AC^2 : CD^2 = AP . PB : PM^2$
 gleich, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}ab = ax - x^2 : y^2.$

Nun wollen wir CD^2 anders ausdrucken.
 Man ziehe die aus dem Brennpunkt F
 bis an das Ende der kleinern Axe D eine
 Linie FD , so ist nach dem pythagorischen
 Lehrsaß $CD^2 = FD^2 - FC^2$, das ist, wenn
 man ihre Werthe §. 192. substituirt:
 $\frac{1}{4}ab = FD^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab.$

Nun wollen wir sehen, was FD^2 ist; man
 subtrahire beederseits $\frac{1}{4}ab$, so ist,
 $FD^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0.$ Folglich wenn beee-
 derseits addirt wird,

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \\
 \hline
 FD^2 = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{und} \\
 FD = \frac{1}{2}a.
 \end{array}$$

Demnach wird allemal die aus dem
 Brennpunkt der Ellipsis an das Ende
 der kleinern Axe gezogene Linie FD die
 Helfte der größern Axe seyn; dahero läßt
 sich auch das Quadrat von DC , oder DC^2 ,
 wenn

wenn man $FC = c$ setzt, folgender maßen ausdrücken: $DC^2 = \frac{1}{4}a^2 - c^2$.

Es ist also die Verhältniß

$$AC^2 : CD^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$$

woraus sich PM^2 finden läßt

$$\text{nemlich } \frac{(\frac{1}{4}a^2 - c^2) \cdot (ax - x^2)}{\frac{1}{4}a^2} = PM^2$$

weil ferner $FC = fC = c$ gesetzt wurde, so ist

$$PC = AC - AP$$

$$= \frac{1}{2}a - x$$

$$Pf = Cf + PC$$

$$= c + \frac{1}{2}a - x$$

$$PF = CF - PC$$

$$= c - \frac{1}{2}a + x. \text{ Folglich}$$

$$PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$$

$$= (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$PF^2 + PM^2 = FM^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2 + 2cx$$

$$- \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

Item

Ferner ist

$$Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 \\ = \frac{1}{4}(a+c)^2 - 2cx - ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$Pf^2 + PM^2 = fM^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2 - 2cx \\ - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = \frac{1}{2}a + c - \frac{2cx}{a}$$

$$\text{Da aber } FM = \frac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

$$\text{so ist } fM + FM = a = AB.$$

Dieses ist der Beweis derjenigen Eigenschaft der Elliptischen Linie, daß nemlich alle aus den beiden Brennpunkten an einen Punkt der Peripherie gezogene gerade Linien zusammen genommen der größern Axe gleich seyen. Folglich sind die Summen aller auf diese Weise gezogenen Linien einander gleich; das ist $fM + Mf = FN + Nf$ u. s. w. und die Dreyecke fMf , FNf u. s. w. sind durchgehends so beschaffen, daß ihr Parameter, oder die Summe der drey Linien, durch welche sie beschloffen werden, immer gleich groß und einerley bleibt. Man siehet hieraus, daß sich leicht eine Ellipsis aus der gegebenen

benen Eigenschaft bestimmen läßt. Eben: Einige präse,
falls erhellet aus dem gegebenen Beweis, tische Folgen
wie man die sogenannte Elliptische Sprach:
gewölbe erbauen müsse. Dann wenn aus dem ge:
eine Person in F und die andere in f ste: gehenen Be:
het, so werden alle Töne, die von F aus in
den Punkten M, D, N , u. s. w. anstoßen, weis;
nach f ihre Richtung bekommen; folglich
wird derjenige Zuhörer, der in f steht,
den Redner in F , wenn er auch gar nicht
laut redet, am besten und besser als die
näheren Zuhörer verstehen. Wir haben
gesagt, daß man auch die Abscissen von
dem Mittelpunkt zu zählen ansehen könn:
ne. Dann C ist der Mittelpunkt, folg: Tab. IV.
lich wird die davon gerechnete Abscisse fig. 68.
 $PC = x$ und $AP = AC - PC = \frac{1}{2}a - x$, Eine Gleichung für die
hingegen $PB = PC + CB = \frac{1}{2}a + x$ Ellipsen, wenn die
seyn. Da sich dann die vorige Gleichung Abscissen
wieder ergibt. Oder wenn man $AC = r$ von dem Mit:
setzet, so ist $AP = r - x$ und $PB = r + x$ telpunkt an
folglich $AP \cdot PB = r^2 - x^2$. Nennet gerechnet
man nun $CD = d$, so ist, weil, werden.

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AP \cdot PB$$

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

$$\text{folglich } r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$$

$$\text{und } y^2 = \frac{d^2 \cdot (r^2 - x^2)}{r^2} : y^2$$

in welcher Gleichung die Abscissen von dem
Mittelpunkt gerechnet werden.

Erklärung §. 196. Die Hyperbel ist die letzte
der Hyper- krumme Linie, welche durch die conische
bel, und ihre Sectionen entsteht. Ihre Gleichung ist
algebraische $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$; das ist, in der Hy-
Gleichung. perbel ist das Quadrat der Semiordina-
 te gleich dem Product des Parameters in
 die Abscisse, und noch dem durch die
 Zwerchaxe dividirten Product des Para-
 meters in das Quadrat eben derselben
 Abscisse. Die Zwerchaxe heißt die Linie
 AB, welche von dem Scheitelpunkt der
 einen Hyperbel in den Scheitelpunkt der
 andern gezogen wird, indeme, wie wir
 §. 186. gezeigt haben, die Ase einer jeden
 Hyperbel, wenn sie über den Scheitel-
 punkt verlängert wird, die gleichfalls ver-
 längerte Seite des Kegels endlich schnei-
 den muß; diese Linie heißt nun die Zwerch-
 axe; (axis transversus). Theilet man
 sie nun in zween gleiche Theile in C, so
 heißt C der Mittelpunkt davon. Wenn
 man endlich zwischen der Zwerchaxe und
 dem Parameter die mittlere Proportio-
 nallinie sucht, so wird die gefundene Li-
 nie die conjugirte Ase genannt. (axis
 conjugatus.) Nun läßt sich leicht der
 Brennpunkt in der Hyperbel finden. Nach
 der gegebenen Gleichung, weil die Semi-
 ordinate allemal in diesem Fall der halbe
 Parameter ist, wird seyn

Tab. IV.
 Fig. 67.

Was die
 Zwerchaxe
 seye;

Was der
 Mittelpunkt
 oder Centrum
 hyperbolæ
 heiße;

und was
 axis conju-
 gatus seye;

wie man den
 Brennpunkt

$$\frac{1}{4}b^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

der Hypothet

$$\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{4}b} = \frac{bx + \frac{bx^2}{a}}{\frac{1}{4}b} : b$$

Andes

$$\frac{1}{4}b = x + \frac{x^2}{a}$$

$$\frac{\frac{1}{4}ab}{\frac{1}{4}a} = \frac{ax + x^2}{\frac{1}{4}a} : a$$

$$\frac{1}{4}ab = ax + x^2 \text{ eine quadratische un-}$$

reine Gleichung;
folglich

$$\frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{4}a^3 \quad \text{addirt:}$$

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$

daher

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab\right)} = \frac{1}{2}a + x \quad \text{demnach}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab\right)} - \frac{1}{2}a = x.$$

Da nun $\frac{1}{2}a$ die halbe Zwerchaxe oder die Distanz des Scheitelpunktes A von dem Mittelpunkte C ist, so wird die Distanz des Brennpunktes vom Mittelpunkte, wenn man nemlich $\frac{1}{4}a$ addirt, $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab\right)}$. Wie man übrigens bey der Elliptischen Linie bewiesen hat, daß die aus den beiden Brennpunkten an einen Punkt der Peripherie gezogene Linien der größern Axe gleich seyen, so läßt sich auf gleiche Weise darthun, daß bey zwey gleichen Hyperbeln, welche durch die Zwerchaxe in den Punkten A und B vereinigt werden, die Differenz zweyer solchen Linien, auch der Zwerchaxe gleich seyen. Die Art des Beweises ist ganz gleich mit demjenigen,

Art 2.

von

den wir §. 193. vorgetragen haben; daher wir auch dißfalls nicht ohne Noth uns in Weitläufigkeiten einlassen wollen.

§. 197. Hingegen ist dasjenige bey dieser krummen Linie etwas neues, was von den Asymptoten gelehret wird. Wir wollen daher diese Materie kürzlich vortragen. Man beschreibe mit den Semiordinaten PM , Pm durch den Scheitelpunkt A eine Parallellinie DE , und mache sie der conjugirten Aye dergestalten gleich, daß DA die halbe Aye und AE die andere halbe Aye wird; hernach ziehe man aus dem Mittelpunkt C durch die Punkte D und E die Linien CD bis R u. s. w. wie auch die Linie CE bis r u. s. w. so werden CR und Cr die Asymptoten der Hyperbel werden. Den Ursprung dieses Rahmens wollen wir sogleich zeigen, wenn wir vorhero einige andere Linien bestimmen haben. Aus der Proportionslehre wissen wir noch, daß

$$CA:AE = CP:Pr$$

und $CA:AD = CP:PR.$

folglich ist $Pr = \frac{AB \cdot CP}{CA}$

und $PR = \frac{AD \cdot CP}{CA}.$

Weil aber $AD = AE$, indeme diese Linien

nien gleich gemacht worden sind, so ist, wenn man gleiches für gleiches setzt, auch

$$PR = \frac{AE \cdot CP}{CA}; \text{ wenn nun zwei Größen}$$

einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich, folglich ist $PR = Pr$.

Nun ist aber auch nach der Natur der Semiordinaten

$$PM = Pm$$

folglich
das ist

$$\begin{aligned} PR - PM &= Pr - Pm \\ RM &= rm. \end{aligned}$$

Nun ziehe man ferner die Linie AI parallel mit DC , so ist

$$EA:ED = AI:DC \text{ nun ist}$$

$$EA:ED = \frac{1}{2} : 1 \text{ folglich}$$

$$AI:DC = \frac{1}{2} : 1$$

$$\text{das ist, } AI = \frac{1}{2}DC.$$

$$\text{und weil } DC = CE, \text{ so ist } AI = \frac{1}{2}CE.$$

$$\text{ferner ist } EA:AD = EI:IC.$$

$$\text{Nun ist } EA:AD = 1 : 1.$$

$$\text{Dahero } EI:IC = 1 : 1. \text{ das ist}$$

$$EI = IC = \frac{1}{2}CE.$$

$$\text{Es ist aber auch } AI = \frac{1}{2}CE.$$

$$\text{folglich } EI = CI = AI.$$

Nun heisset man das Quadrat der Linie AI oder CI die Potenz der Hyperbel; sie wird sich also leicht aus den beiden

Was die Po. Axen bestimmen lassen. Dann $CA = \frac{1}{2}a$ und AE die andere halbe Axe wollen wir dem der Hyperb. $\frac{1}{2}c$ nennen. Da nun nach dem pythagoräischen Lehrsatz $CE^2 = CA^2 + AE^2$

$$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$$

so ist $CE = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2\right)}$

und $\frac{1}{2}CE = CI = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2\right)}$

folglich $CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$, das heißt, die

Potenz der Hyperbel ist der sechszechende Theil von der Summe der Quadrate der beiden Axen; oder weil $c^2 = ab$, indem a , nach der gegebenen Erklärung, die se Axe die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwerchaxe a und dem Parameter b , folglich \sqrt{ab} ist, daher ihr Quadrat ab heißt; so wird $CI^2 = \frac{a^2 + ab}{16}$

$$= \frac{(a + b)a}{16}$$

Wie man das §. 198. Nun wollen wir auch noch sehen, wie groß die Differenz der zwey Quadrate PM^2 und PR^2 seye, ob sie nemlich beständig und unveränderlich bleibe, oder ob sie nach und nach vermindert und zuletzt $= a$ werden könne. DA ist $\frac{1}{2}DE$, folglich, wie wir gezeigt haben $= \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, das ist $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$; $CA = \frac{1}{2}a$, $CP = \frac{1}{2}a + x$, wenn $AP = x$, folglich wird nach den Proportionsregeln seyn:

CA

$CA:AD=CP:PR$ das ist Linie selbst

$\frac{1}{2}a:\sqrt{\frac{1}{4}ab}=\frac{1}{2}a+x:PR$. Demnach zusammen

$$PR = \frac{(\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab})}{\frac{1}{2}a}$$

das ist, wenn fallen, wenn
man wirklich sie auch
dividirt,

$$PR = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$$

folglich qua: gleich noch
drirt, so weit fort-

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{bx^2}{a}$$

gezogen wer-

$$PM^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

den;

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab.$$

Also ist die Differenz dieser zwey Quadrate beständig und immer einerley; darum kann es nicht geschehen, daß jemals die Differenz null werde; weil sonst die Zwerchare und der Parameter auch null werden müßten. Ist aber dieses nicht möglich, so kann auch RM niemalsen nulle werden, weil sonst $PR^2 - PM^2 = PM^2 - PM^2$ das ist, wirklich null würden; demnach wenn auch die Linie AM und CR ins unendliche fortgezogen würden, so müßte doch MR immer noch eine positive Zwischenweite bleiben; weil sonst die Differenz der beeden Quadraten PR^2 und PM^2 folglich auch $\frac{1}{4}ab = 0$ würde, welches unmöglich ist. Folglich kommen die beede Linien, nemlich die gerade CR und die krumme AM einander immer näher, und doch

Ursprung des griechischen Rahmens Asymptote; fallen sie niemals zusammen, indeme immer noch eine Entfernung zwischen beiden bleiben muß. Nun begreift man die Ursache, warum die griechische Messkunstler die Linie CR eine Asymptote von der Hyperbel AM genannt haben. Dann eine Asymptote ist eine solche Linie, die einer andern Linie sich immer nähert, und doch niemals mit ihr sich vereinigt oder zusammenfällt. Aus diesem Grunde hat

Wir ferner Hr. v. Leibniz die endliche Geister Asymptoten von Gott genannt haben;

was eine gleichseitige Hyperbel heve.

der Herr von Leibniz die endliche Geister Asymptoten von Gott genannt; ein Gedanke, welcher in der That nicht nur wichtig, sondern auch gründlich ist. Bei der Hyperbel haben wir die einzige Frage noch zu erörtern, was ihre Gleichung sey, wenn die Hyperbel gleichseitig (hyperbola æquilatera) wäre. Die Erklärung einer solchen Hyperbel wird uns so gleich auf ihre Eigenschaften führen. Wenn die beide Axen einander gleich sind, so ist die Hyperbel gleichseitig. Folglich wird nach den §. 194. gegebenen Erklärungen $a = \sqrt{ab}$, und $a^2 = ab$, daher wenn man beiderseits mit a dividirt, $a = b$; also sind in einer solchen Hyperbel die beide Axen und der Parameter einander gleich. Da nun die Fundamentalgleichung für alle Hyperbeln ist

$$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}, \text{ so wird für die gleichseitige, worinnen } a = b \text{ heraus kommen,}$$

$$y^2$$

$$y^2 = ax + \frac{ax^2}{a} = ax + x^2.$$

Wenn man endlich die Abscissen in einer der Asymptoten annimmt, und von dem nach Belieben angenommenen Punkt mit der andern Asymptote eine Parallellinie bis an die krumme Linie (ad hyperbolam externam) zieht, welche die Semiordinate vorstellt, so hat man eine Hyperbel zwischen den Asymptoten, (hyperbolam intra asymptotos) in welcher $xy = ab$. Wenn nemlich x die in den Asymptoten genommene Abscisse, und y die Semiordinate ad curvam externam bedeutet. Das ist nun alles, was wir von den conischen Sectionen sagen wollten; wir betrachten daher jetzt auch einige andere krumme Linien.

§. 199 Wir haben in dem ersten Capitel gezeigt, daß sich eine Menge von krummen Linien gedenken lasse; doch sind wir nicht für nöthig, selbige umständlich zu beschreiben. Die Radlinie, das ist griechisch die Trochois oder Enclois, welche beschrieben wird, wenn sich ein Rad um seine Axe herum bewegt, und durch diese Bewegung sich wirklich fortwälzt, hat in der Mechanik ihren besondern Nutzen. Wir dürfen sie also hier übergehen; Um so mehr, da sie und noch andere genannte und ungenannte krumme

me Linien von höhern Gattungen sind, und nicht wie die conische Sectionen behandelt werden können. Eben so würden wir unserm vorgesetzten Zweck entgegen handeln, wenn wir die Cissoids, die Conchois, die verschiedene Quadratrices, die Spiral; und andere krumme Linien umständlich beschreiben wollten. Eine aber ist noch übrig, deren Eigenschaften eine Aufmerksamkeit verdienen; nemlich die Logistik, oder die logarithmische Linie. Wenn man eine gerade Linie nach Belieben in so viel gleiche Theile theilet, als man will, und aus den Theilungspunkten A, P, N , u. s. w. die Linien AB, PM, NQ in einer continuirlich; geometrischen Verhältniß folglich dergestalten beschreibet, daß $AB:PM=PM:NQ$ u. s. w. so wird die krumme Linie BMQ die logarithmische Linie genannt. Wenn ich nun die Linien AP, AN u. s. w. Abseissen nenne, so werden AB, PM, NQ u. s. w. ihre Semiordinaten seyn. Folglich sind die Abseissen in diesem Fall die Logarithme der Semiordinaten. Dann wenn man von unten anfängt, und z. E. die erste Semiordinate 2, die andere 4, die dritte 8, die vierte 16 ist, u. s. w. so geben die Semiordinaten folgende geometrische Progression:

2, 4, 8, 16, 32 u. s. w.

die

Was die Logistik oder logarithmische Linie seye, und warum von dieser

Tab IV.
Fig. 69.

vorzüglich
gehandelt
werde.

Die Abseissen der Logistik sind die Logarithme der correspondirenden Semiordinaten;

die Abscissen

aber diese 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.

Folglich sind die Abscissen der Logarithme ihrer Semiordinaten; wenn also eine Semiordinate y und die andere z ist, so werden ihre Abscissen ly und lz heißen. Man wird diese Erklärungen im folgenden Capitel wieder gebrauchen, daher man billig darauf zu merken hat. Aus dem bisherigen sehen wir zugleich, daß die Linie AT , man mag sie verlängern, so weit man will, mit der krummen Linie BMQ nicht zusammen falle, folglich ihr Asymptot seye. Dann wenn eine Semiordinate $PM=0$, so wird $AB:PM=1:0$, das ist unendlich groß werden; folglich müßte auch AP die Abscisse davon unendlich lang seyn; wie man unter andern auch aus der Lehre von den unendlichen Progressionen in Brüchen ersehen kann.

Wie ferno
man durch
die Logistie
eine Asymptote habe;

§. 200. Es ist noch übrig, daß wir von den geometrischen Orten handeln. Wie es in der Arithmetik unbestimmte Aufgaben gibt, so gibt es auch solche in der Geometrie. Eine Linie, durch welche eine unbestimmte Aufgabe aufgelöst wird, heißt ein geometrischer Ort. Da es nun gerade und krumme Linien gibt, so werden sich die geometrische Orte auf einer doppelten Seite betrachten lassen. Diese jenige geometrische Orte, welche durch eine

Von geometrischen Orten;

Erklärung
dieser Benennung;

eine

§ 24 Geom. III. Cap. Von Kegelschnitt.

Was eine gerade Linie oder auch durch den Circel construirt werden; hiesse man vor Zeiten *locus plana* (flache Derter). So ist

z. E. $y = \frac{ax}{b}$ eine Gleichung für einen flachen Ort;

Tab. II. dann wenn $CD = b$, $DE = a$,
Fig. 39. und $CA = x$, so ist $AB = y = \frac{CA \cdot DE}{CD}$

$= \frac{ax}{b}$ weil $CD : DE = CA : AB$, die Auf-

locus solida gabe ist aber unbestimmt, dann alle mit DE parallelgezogene Linien werden diese

seyn;

Gleichung auflösen. Wenn aber der geometrische Ort durch eine Parabel oder Ellipse oder Hyperbel u. s. w. construirt werden muß, so heißt er *locus solidus* (einkörperlicher Ort). Z. E. wenn man verlangt, man solle ein Dreieck machen, von derjenigen Beschaffenheit, daß die Summe seiner drey Seiten der Summe der drey Seiten des gegebenen Dreiecks vollkommen gleich seye, so wird diese unbestimmte Aufgabe durch einen geometrischen Ort an der Ellipsis bestimmt, wie man aus §. 193. leicht ersehen wird. Das ist der allgemeine Begriff von den geometrischen Dertern. Nun sieht man wohl, daß es unendlich viel Fälle gebe, in welchen dergleichen Aufgaben vorkommen. Wenn man aber nur im Stande ist, aus einer Gleichung zu urtheilen,

wo

wohin sie gehöre, ob sie, wie wir gezeigt, zur Parabel, zur Ellipsis oder zur Hyperbel zu rechnen seye, so wird man die verschiedene Ausdrücke der Gleichungen unter gewisse Hauptgattungen bringen können. Es gibt aber auch neben dem solche Aufgaben, in welchen die unbekannte Größen mehr als zwey Ausmessungen haben; da dann freylich die conische Sectionen zur Construction des Problems nicht zureichend sind. Allein man hilft sich in diesem Fall mit Verbindung zweyer krummen Linien, entweder des Circels und der Parabel, oder des Circels und der Ellipsis, oder des Circels und der Hyperbel u. s. w. Newton hat die Vereinigung des Circels mit der Ellipsis, Baker aber, von deme man die sogenannte Centralregel hat, die Verbindung des Circels und der Parabel angerathen. Um nun unsern Lesern einen Begriff davon zu geben, so wollen wir zwey krumme Linien AMB und DMN miteinander verbinden; aus M , wo sie sich durchschneiden, ziehe man die Semiordinate MP auf die Linie AP herab; nun seye in der Linie AMB die Abscisse $x = y^2 + \beta$ und in der Linie DMN $x = \sqrt{(y^2 + y\gamma)}$

so ist §. 9. $y^2 + \beta = \sqrt{(y^2 + y\gamma)}$
 folglich quadrirte $y^4 + 2\beta y^2 + \beta^2 = y^2 + y\gamma$
 und auf null reducirt $y^4 + (2\beta - 1)y^2 - y\gamma + \beta^2 = 0$.

Hier

Tab. IV.
Fig. 72.

Kurzer Begriff von dieser Methode in einem allgemeinen Beispiele;

Warum man
diese Lehre
nicht um-
ständlich vor-
trage,

und warum
sie in der
Ausübung
nicht ge-
braucht wer-
de)

Befchluss die-
ses Capitels.

Hieraus sieht man nun die Möglichkeit ein, daß durch dergleichen Durchschnitte auch Gleichungen von mehreren Dimensionen construiert werden können. Wir halten uns aber damit nicht auf. Herr Baron von Wolf hat viele Exempel in seinen Elementis davon gegeben. Dem ungeachtet schreibt er T. I. Elem. lat. p. 608. Elem. Analyt. p. 510. *geometricarum aequationum constructiones nullius fere in praxi esse usus; cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radicem per approximationem, &c.* Wir haben da- hero in den bereits gegebenen Bestimmun- gen das nöthigste gesagt. Die geometrische Constructionen der Gleichungen haben fast gar keinen Nutzen in der Ausübung; man sucht eben die Wurzeln durch die Appro- ximation; und daran hat man hernach genug. Dann ob schon die Kräfte des Verstandes und besonders die Erfindungs- kunst durch dergleichen Constructionen er- höhet werden können, so glauben wir doch, daß die bisherige Lehrsätze nach dem uns vorgesetzten Zweck schon hinlänglich seyen, die Seelenkräften im Nachdenken zu üben, und die Liebhaber der gründlichen Wissenschaften zu vergnügen. Wir dar- fen daher auch dieses Capitel, ohne was nöthiges übergangen zu haben, nunmehr beschließen.

IV. Cap.

Von der Fluxionenrechnung
oder von der Kunst zu differenz-
tiren und zu integriren.

§. 201.

Man kann die Fluxionenrechnung nach der Bedeutung des Nahmens, den die Engländer dieser Rechnung geben, am besten dadurch beschreiben, wann man sagt, sie bestehe in der Kunst die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher sich eine gegebene Figur verändert. So richtig dieser Begriff ist, so schwer scheint er besonders für Anfänger zu seyn. Wir wollen uns daher bemühen, ihn auf der leichtesten und faßlichsten Seite vorzutragen. Der große Analyste, MacLaurin, welcher als ein zweyter Archimedes die Schottländische Festung Edinburg wider die mißvergnügte Schotten im Jahr 1746. vertheidigte, und überhaupt durch seine gemeinnützigen Arbeiten und Schriften sich einen unsterblichen Ruhm erworben, hat uns zu dieser Erklärung in seinem vortreflichen Buch unter dem Titel: Treatise of fluxions, Anleitung gegeben. Man betrachte

Wie man sich die Fluxionenrechnung am gründlichsten vorstellen,

Tab. I

Fig. 1.

und wie man diese Vorstel- lung den An- fängern zu lieb, wenn sie auch keine Mechanik verstehen, in einem faßli- chen Vor- trag einlei- den könne;

und wie diese ganze Lehre von dem Be- griff der Ge- schwindig- keit, mit wel- cher sich eine Figur verän- dert, abhan- ge.

trachte das Viereck $ABCD$, und setze $AD = x$, $DC = y$; vx bedeute die Ge- schwindigkeit des Punktes D , bey Be- schreibung der Linie AD ; und vy die Ge- schwindigkeit des Punktes C , indem er die Linie DC beschreibt. Nach Verfließung einer willkürlichen Zeit, die endlich seyn mag, setze aus AD Ai , und aus DC Df oder ig geworden. Ich so suche man die Geschwindigkeit, mit welcher das ganze Rectangulum sich verändert hat; das Rectangulum selbst heist $AD \cdot DC = xy$. Nun fragt man, wie geschwinde $DC = y$ fortrücken müsse, daß die Gleichheit immer bleibe, oder daß in unendlich kleinen Zeittheilen wie in grössern das wachsende Rectangulum AC sich immer ähnlich bleibe; so wird man antworten: mit der Geschwindigkeit des Punktes $D = vx$; eben so wird sich die Linie $AD = BC = x$, die sich zu Erhaltung der Aehnlichkeit nach ef bewegt, mit der Geschwindigkeit des Punktes $C = vy$ bewegen müssen; denn nach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das ganze Rectangulum verändert, $= v(xy) = y \cdot vx + x \cdot vy$. Dann wenn sich diese beide Linien mit einer andern Geschwindigkeit bewegten, so würde die eine früher oder später als die andere an den Ort und Stelle, wohin man sie haben will, kommen, folglich die Aehnlichkeit, welche auch in dem kleinsten Zeit- punkt

Differential u. Integralrechnung. 529

punkt der Veränderung erhalten werden muß, unterbrochen werden. Wenn sich auch bei die-
aber AD mit der Geschwindigkeit von DC ,
und DC mit der Geschwindigkeit AD , das sem Begriff
ist x mit der Geschwindigkeit von y , und y nicht nöthig
mit der Geschwindigkeit von x beweger, so
bleibt das Rectangulum immer sich selbst habe, etwas
gleich, und dem noch nicht veränderten als unend-
in einem jeden Zeitpunkt der Veränderlich klein an-
lung ähnlich; demnach ist die Geschwin-
digkeit, mit welcher sich das Rectangulum zusehen oder
 xy verändert, $xvy + yvx$, ohne daß gar für ein
man nöthig hätte, etwas entweder als
unendlich klein anzusehen, oder wegzu, absolutes
werfen, oder gar für ein absolutes Nichts Nichts zu
zu halten. Wären die Linien AD und halten.
 DC einander gleich, so ist $x = y$, folg-
lich $xy = x^2$, daher in diesem Fall die
Veränderung des Quadrats, $xvx +$
 $xvx = 2xvx$ u. s. w. Nun hat man
in Deutschland den Raum, der sich mit Großer Vor-
dieser Geschwindigkeit verändert, nicht theil dieser
mit dem Buchstaben v sondern d ausge-
drückt, und eine Differentialgröße genannt; heit nebst
dahero $xvy + yvx$ bei uns ausgedrückt ihrer Anwen-
wird durch $x dy + y dx$; und $2xvx$ dung auf die
heißt $2x dx$ u. s. w. Den Ursprung dies-
ser Benennung und des Differentialnah-
mens wollen wir sogleich zeigen.

§. 202. Bei einzeln Größen, die
nicht multiplicirt oder dividirt werden, hat
ll die

die Sache gar keine Schwierigkeit; dann die Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Linie $AD = x$ bewegt, ist eben vx ; Größen, welche durcheinander dividirt werden, reducirt man auf die Multiplication; folglich wird man den Grund der ganzen Fluxionenrechnung verstehen,

Wie man die Rechnung in Deutschland vortragen kann. Wenn man das, was wir S. 201. vorgetragen haben, sich gründlich bekannt macht. Wir wollen aber jezo die gewöhnliche und in Deutschland eingeführte Methode, wie man diese Rechnung ansiehet, kürzlich erzehlen. Man sagt, es wachsen einer

und was Differential-Größen heißen.

veränderlichen Linie, wenn sie grösser wird, immer unendlich kleine Theile an, oder wenn sie kleiner wird, so nehmen sie um solche unendlich kleine Theile ab. Einen solchen unendlich kleinen Theil nennt man das Differentiale von x, y , u. s. w. nemlich dx, dy .

Tab. I.
Fig. 1.

Nun wollen wir die um den unendlich kleinen Theil Di vermehrte Linie $AD + Di$ nennen $x + dx$, und die um Cf vermehrte Linie DC heißen wir aus gleichem Grunde $y + dy$; diese zwei Größen sollen nun miteinander multiplicirt werden; da es dann nach den Regeln geht, indeme

Erklärung der bey uns angenommenen Lebrart.

$$\begin{array}{r} x + dx \\ y + dy \\ \hline xy + ydx + xdy + dxdy. \end{array}$$

Dieses Product ist erstlich das Rectangulum

Differential u. Integralrechnung. 532

gulum $ADCB = AD \cdot DC = xy$, das ziehe ich also ab; weil ich nur zu wissen verlange, um wie viel es verändert worden seye, folglich bleibt, nach Abzug des Rectanguli xy , übrig $ydx + xdy + dxdy$; das aber, was in der Subtraction übrig bleibt, heißt man die Differenz; darum nennen die Deutschen diese Rechnung eine Differentialrechnung; und $ydx + xdy + dxdy$ heißt daher die Differentialgröße von xy . Weil aber $dxdy$, welches das kleine Viereck $ehgf$ ist, gegen $BCfe = xdy$ und $DChi = ydx$ unendlich klein und wie nichts zu rechnen ist, so wirft man auch dieses hinweg, und sagt, die Differentialgröße von xy ist $xdy + ydx$. Nun lasse ich vernünftigen Lesern das Urtheil über das weggeworfene $dxdy$ selbst über; wenn sie die Figur ansehen, so werden sie sagen, die Differenz zwischen dem veränderten und noch nicht veränderten Rectangulo seye $BefC + fghC + DChi$, und nicht allein $BefC + DChi$; oder blos $ydx + xdy$. Das Viereck $Cfgh$ mag noch so klein seyn, als es will, so ist es doch etwas, das die so accurate Mathematiker nicht wegwerfen sollten; will man es aber hebenhalten, so gibt es in der Rechnung nicht nur Schwierigkeiten, sondern es würde auch manches falsches herauskommen, welches vermieden wird, wenn man das

Warum man diese Rechnung eine Differentialrechnung heiße.
Einige Schwürigkeiten, die einem bey der gemeinen Erklärung billig einfallen müssen, werden kürzlich vorgetragen, da dann das Urtheil dem vernünftigen Leser überlassen wird, ob er lieber schon oder deutschen Erklärungsart, daffalls beygepflichten wolle.

$dx dy$ wegwirft. Die Sache hat also an und vor sich selbst ihre Richtigkeit und hält die Probe; nur ist die Art und Weise, wie man sie erklärt, nicht die beste. Einige haben daher das dx und dy für absolute Nullen angesehen; in welchem

Warum man Fall ich freylich $dx dy$ wegwerfen muß; die unendlich weß nulle mal nulle allemal nichts ist; kleine Theile nicht als ab- allein ich müßte in diesem Fall auch $y dx$ solute Nullen und $x dy$ wegwerfen; weil nulle mal y so ansehen können; gut nichts ist als nulle mal nulle. Allen diesen Einwendungen entgehet man glücklich, wenn man dasjenige, was ich §. 201.

und wie man allen Einwendungen bey der Lehrform der Engländer entgehet.

gesagt habe, bey dieser Materie zu Grund legt, und die Differentialien als die Geschwindigkeiten ansieht, mit welchen sich eine Grösse verändert. Die Sache ist so überzeugend, als irgend ein Beweis seyn kann. Ueberhaupt werden die MacLaurinische Schriften, mit welchen mich der berühmte Herr Prof. Kästner bekannt gemacht hat, allen denjenigen ein Genüge leisten, welche auch diese Rechnung gründlich verstehen wollen.

Warum man aber nichts desto weniger die in Deutschland eingeführte Namen und Zeichen beybehalte.

Inzwischen werden wir künftighin die in Deutschland eingeführte Namen beybehalten, und statt Fluxionen; immer Differentialrechnung sagen; nur muß man, wie wir gezeigt, den Grund von der Richtigkeit dieser Rechnung aus dem mehrmalen angeführten §. voraussetzen, und sich recht bekannt machen.

§. 203. Nunmehr können wir die Anwendung Kunst zu differenziren auf die vier Rech- der Differen-
nungsarten anwenden. Es gibt verän- tialkunst auf
derliche und unveränderliche Größen. Je- die vier Rech-
ne allein kann man differenziren, weil nungsarten.
differenziren eigentlich nichts anders ist, als anzeigen, daß und wie eine Größe verändert worden seye. Von einer un- Warum und
veränderlichen Größe kann ich also nicht wie fern das
sagen, daß oder wie sie verändert werde, Differential-
weil sie unveränderlich ist. Das- heist, veränderli-
ihr Differentiale ist nichts. 3. E. das chen Größe
Differentiale vom Parameter ist nichts, null oder
oder der Parameter hat kein Differentia- nichts seye?
le, oder auch der Parameter kann weder eine Benen-
größer noch kleiner werden; in diesem nung, welche
Verstand sagt man, die Differentialen der von allen
beständigen und unveränderlichen Größen Mißdeutun-
seyen Nullen; nicht als ob die Größe gen gerettet
selbst in Nullen verwandelt wäre, sondern wird.
weil sie wirklich keine Fluxion hat, und, wenn ich ihr eine zuschreiben wollte, sie wirklich $= 0$ wäre. Diesemnach ist das
Differentiale von $a = da = 0$, weil man Was derglei-
bekannter massen die beständige Linien chen bestän-
durch die ersten Buchstaben des Alpha- dige oder un-
bets ausdrückt. Solche beständige Linien veränderli-
sind nun die Radii eines Kreises, der che Größen,
Diameter, der Parameter in den conischen und was die
Sectionen, die Arcen in den Ellipsen und veränderli-
Hyperbeln u. s. w. deren Differential je- che seyen,
desmal $= 0$. Hingegen die Abscissen, die wird ange-
führt.

Von Differenzirung derjenigen Größen, die addirt und subtrahirt werden.

Semiordinaten u. s. w. sind lauter veränderliche Linien, welche folglich sich differenziren lassen, und deren Differentialgrößen wirkliche Größen sind. Wenn also die Abscisse x heisset, so ist ihr Differentiale dx , und die Semiordinate y hat zum Differentiale dy . Sollte man dennoch $x+y$ differenziren, so hiesse es eben, $dx+dy$, und $x-y$ wird differenzirt $dx-dy$ heißen; $x+a$ heisset differenzirt $dx+a$; ferner $x+a-z$ gibt differenzirt $dx+a-dz=dx-dz$. u. s. w.

Bei der Multiplication haben wir schon gezeigt, wie man zu Werke gehe; als welches der einzige Fall ist, der schwerer zu unterscheiden scheint; alle Schwierigkeiten aber vermehren sich auf einmal, wenn man die Maclaurinische Erklärung genau überdenkt, und einsehet, daß das Rectangulum xy differentirt wird, wenn man x in die Geschwindigkeit von y , die wir dy nennen, und y in die Geschwindigkeit von $x=dx$ multiplicirt, und die beide Partialproducte addirt. Also ist $xy=xdy+ydx$; $xz=xdz+zdx$, $tu=tdu+u$ d. u. s. w. Man multiplicirt nemlich einen jeden Factor in das Differentiale des andern, und addirt die Partialproducte. Auf diesen Fall wird nun auch die Differentiirung dreier Factorum reducirt, da man je zween und zween in das Differentiale des dritten

Allgemeine Regel bey der Multiplication.

multi-

multiplieirt. 3. E. man solle xyz differenziren. Nun setze man

$$xy = t \text{ so ist}$$

$$xyz = tz \text{ folglich}$$

$$d(xyz) = t dz + z dt$$

$$\text{Nun ist} \quad x dy + y dx = dt$$

folglich

$$\text{substituiert } d(xyz) = t dz + xz dy + yz dx$$

$$\text{und weil} \quad t = xy$$

$$d(xyz) = xy dz + xz dy + yz dx.$$

Wenn daher vier Factores vorkämen, so werden je drey und drey allemal in das Differentiale des vierten multiplieirt u. s. w.

§. 204. Die umständlich bewiesene Regel, multiplicirte Gröſſen überhaupt zu differenziren, wird uns nun auch bey der Differentiation der Potenzen zu stat-
Wunder Dis-
ferentiation
der Potenzen,
und wie sich
diese auf die
Multiplieas-
tionsregel
reduciren
laſſe.

ten kommen. Wenn ich xx differenzire, so bekomme ich $x dx + x dx = 2 x dx$. differenzire ich xxx , so habe ich $xx dx + x dx + x dx = 3 xx dx = 3 x^2 dx$; folglich wird x^4 differenzirt geben $4 x^3 dx$, x^5 gibt $5 x^4 dx$ u. s. w. Man multiplicirt also das Differentiale der ersten Potenz in das Product des Exponenten und der gegebenen Potenz, deren Exponent aber um eins vermindert wird. Denn aus den gegebenen Exempeln erhellet, daß

Allgemeine
Regel für
diesen Fall;

samt dem
Beweis.

die Differentialgröße einer Potenz entstehe, wenn man den Exponenten der Potenz um eins vermindert, und sodann diese erniedrigte Potenz mit dem Differentiale ihrer ersten Dignität multiplicirt, und das ganze Product nochmales mit dem unverminderten Exponenten multiplicirt.

Anwendung Demnach ist das Differentiale von x^m auf allgemei,

ne Exempel, $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$; wenn man

nemlich $\frac{m}{n} - 1$ unter einerley Benen-

nung bringt nach §. 67. ferner weil die Wurzeln allemal in Dignitäten verwandelt werden, deren Exponenten Brüche sind, §. 58. so wird das Differentiale

von $\sqrt[n]{x^m} = \text{Diff. von } x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx$

$= \frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx$; Eben so ist $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

besonders folglich sein Differentiale $\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx =$

auch auf die $\frac{1}{2} x^{\frac{1-2}{2}} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Weil ferner $x^{\frac{1}{2}}$

Wurzelgrößen, $x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$ und so

berhaupt $x^{\frac{1}{m}} = x^{-m}$, so ist das Differen-

tiale von $x^{\frac{1}{m}}$ oder $x^{-m} = -1 \cdot x^{-m-1} dx = -\frac{1}{x^{m+1}} dx$

Differential u. Integralrechnung. 537

$x^{-2} dx$; das Differentiale von $\frac{1}{x^2}$ oder $x^{-2} = -2 x^{-3} dx$, und überhaupt das Differentiale von $\frac{1}{x^m}$ oder $x^{-m} = -$

$m x^{-m-1} dx$. Endlich da auch $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= x^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ so wird

das Differentiale von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} dx = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx$;

und das Differentiale von $\frac{1}{\sqrt[m]{x}}$ oder $x^{-\frac{1}{m}}$ $= -\frac{1}{m} x^{-\frac{1}{m}-1} dx = -\frac{1}{m} x^{-\frac{1+m}{m}} dx = -\frac{1}{m} x^{-\frac{1+m}{m}} dx$.

§. 205. Wie nun alle diese Gleichungen aus der einzigen Regel, ein Product zu differenziren, hergeleitet werden, so werden wir nun auch aus eben dieser Regel lernen, wie man Grössen differenzirt, da von eine die andere dividirt. Es sey $\frac{x}{y}$ zu differenziren. Wir wissen aus dem ersten Theil noch, daß $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, und weil allemal $\frac{1}{y} = y^{-1}$, so ist $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$.

Diesen Ausdruck können wir nun leicht nach der Multiplicationsregel differenziren. Das Differentiale von x ist dx , und das von y^{-1} ist $-1 \cdot y^{-2} dy = -y^{-2} dy$; folglich heißt das Differentiale des ganzen Productes $y^{-1} dx + x \cdot -y^{-2} dy = y^{-1} dx - xy^{-2} dy = d \cdot \frac{x}{y}$. Nun ist y^{-1}

$= \frac{1}{y}$ und $y^{-2} = \frac{1}{y^2}$; wenn man nun gleiches für gleiches substituirt, so heißt die obige Gleichung $\frac{1}{y} dx - \frac{x dy}{y^2} = \frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} = \frac{y dx - x dy}{y^2} =$

Diff. $\frac{x}{y}$. Wenn man also das Differentiale der zu dividirenden Zahl mit dem

Divisor multiplicirt, und von dem Product das mit der zu dividirenden Zahl multiplicirte Differentiale des Divisors subtrahirt, und den Rest durch das Quadrat des Divisors multiplicirt, so hat man zwei einander dividirende Größen differenzirt; folglich kann man auch alle Brüche differenziren, weil zwei einander dividirende Größen nichts anders als ein Bruch sind; ein Bruch wird daher differenzirt, wenn man das Differentiale des Zehlers mit dem Nenner multiplicirt, und hernach das mit dem Zehler multiplicirte Differentiale des Nenners davon subtrahirt.

Von der Differentiation der Brüche, welche auf gleichem Grunde beruhet.

Wenn man also das Differentiale der zu dividirenden Zahl mit dem Divisor multiplicirt, und von dem Product das mit der zu dividirenden Zahl multiplicirte Differentiale des Divisors subtrahirt, und den Rest durch das Quadrat des Divisors multiplicirt, so hat man zwei einander dividirende Größen differenzirt; folglich kann man auch alle Brüche differenziren, weil zwei einander dividirende Größen nichts anders als ein Bruch sind; ein Bruch wird daher differenzirt, wenn man das Differentiale des Zehlers mit dem Nenner multiplicirt, und hernach das mit dem Zehler multiplicirte Differentiale des Nenners davon subtrahirt.

Differential u. Integralrechnung. 539

hirt, hernach alles mit dem Quadrat des Nenners dividirt.

§. 206. Nunmehr werden unsere Leser überzeugt seyn, daß die ganze Kunst auf die Differentiirung des Rectanguli xy ankomme, und daß man alle mögliche Größen differentiiren könne, wenn man den Fundamentalbegriff von Differentiirung des xy versteht. Wir glauben daher die Beschuldigung von uns ablehnen zu können, daß wir ohne Noth in Bestimmung der Grundideen der Differenzirkunst weitläufig gewesen seyen. Uebrigens werden die Differentialgrößen durch die Integrirung wieder aufgehoben, wie wir im folgenden zeigen. Wie z. E. x^2 differenzirt, $2x^2 dx$ gibt, so ist von diesem Differentiale das Integrale wieder von x^2 , welches gefunden wird, wenn man den Exponenten um eins vermehrt, und hernach alles mit dx und dem um eins vermehrten Exponenten dividirt. So ist

aus dem biqu-
berigen er-
bellet, daß die
Differentia-
tion eines
Rectanguli
oder xy der
Grund von
dieser ganzen
Lehre seye,
dahero man
in Bestim-
mung dieses
Grunds nicht
ohne Noth
weitläufig
war.

Vorläufige
Anzeige, wie
durch die In-
tegration die
Differentia-
tion wieder
aufgehoben
werde.

Das Integrale von $2x^2 dx = \frac{2x^{2+1} dx}{2 dx}$

$= x^3$; und das Integrale von $\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx$

$$= \frac{\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx}{\frac{n-m}{m}} = x^{\frac{n-m}{m}} = x^{\frac{n-m+m}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$$

== 4

$= x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$. u. s. w. Diese Formel kommt am häufigsten vor; wir haben daher selbige um so eher vorläufig anzuzeigen für gut befunden. Uebrigens soll auch diese Kunst im folgenden umständlich vorgetragen und erläutert werden.

Wer der Erfinder dieser schönen und gemeinnützigen Rechnung seye?

S. 207. Jeko müssen wir doch auch fragen, wer der Erfinder von dieser so schönen und gemeinnützigen Rechnung gewesen seye. In England schreibt man sie dem Newton und in Deutschland dem Leibniz zu. Inzwischen kann man nicht läugnen, daß Isaac Barrowius, ein und wie ferne gleich grosser Theologe und Mathematiker, unter welchem Newton zu Cambridge die mathematische Wissenschaften studierte, folgende Proportion aus einer von ihm angegebenen Figur geschlossen, und in seinen Lectionibus opticis & geometricis vorher schon, ehe Newton und Leibniz was schrieben, bekannt gemacht haben.

Tab. IV.

Fig. 71.

Die Erfindung Barrowius wird erklärt,

Man beschreibe eine krumme Linie AM , die ihre convexe Seite gegen eine gerade Linie AP lehre; hernach ziehe man die Tangente TM , und ziehe die Semiordinate PM ; wenn nun pm mit PM parallel und ihm so nahe gezogen wird, daß der Bogen Mm von der geraden Linie nicht abweicht, so wird die Subtangente PT gefunden werden, wenn man sagt:

MR

$$MR : Rm = MP : PT$$

oder in den von Bar-

row gesetzten Buch: $e : a = y : \frac{ay}{e}$

staben :

das heißt mit unsern

Buchstaben : $dy : dx = y : \frac{y dx}{dy}$

Das ist nun ein Fundamentalausdruck, und gezeigt, dessen Fruchtbarkeit wir sogleich finden, daß sie mit Leibniz hat, deswegen das ΔMRm ein Triangulum characteristicum genannt, weil man mit Beziehung der Gleichungen der krummen Linie durch dasselbe solche Eigenschaften in Rücksicht auf die Subtangente entdeckt, welche erst die Differentialrechnung brauchbar

und gezeigt, daß sie mit demjenigen, was Herr v. Leibniz das Triangulum characteristicum genannt hat, völlig übereinkommt.

und gemeinnützig machen. Nun ist frey-

lich diese einige Barrowische Figur bey

weitem noch nicht dasjenige, was die Flus-

sionenrechnung in sich faßt; allein für

einen Newton und Leibniz ware es schon

genug. Geister von diesem Rang könn-

ten aus einem einigen Umstand und noch

so kleinen Fingerzeig weiter schliessen.

Und das ist es auch, was wir in Absicht

auf die Erfindung dieser Rechnung sagen

wollten. Wäre kein Newton und Leib-

niz gekommen, so würde der Barrowi-

sche Lehrsatz vielleicht lange ungenützt ge-

blieben seyn, wie die Newtonische und

Leibnizische Erfindung selbst noch jezo nicht

so hoch geachtet würden, wenn keine Eu-

ler und Bernoulli nach der Hand erst

Warum aber dem ungeachtet Newton und Leibniz den größten Anteil an der völligen Erfindung dieser Rechnung haben.

durch

durch ihre neue Entdeckungen dieser brauchbaren Rechnung einen bleibenden Namen, sich selbst aber einen unsterblichen Ruhm gemacht hätten.

Anwendung
dieser Rechnung
auf die
höhere Geometrie,

§. 208. Wir haben von der Erfindung dieser Kunst das nöthigste gesagt. Es ist also nichts mehr übrig, als daß wir jezo die Anwendung davon zeigen. Das Barrowische Dreieck, oder des Herrn v. Leibniz Triangulum characteristicum

Tab. IV.
Fig. 70.

Allgemeine
Regel, wie
man durch
Hülfe des
Barrowi-
schen Dre-
ecks aller
krummen Li-
nien Sub-
tangenten
ausdrücken
kann;

verdient zuerst und vor allen andern unsere Aufmerksamkeit. Wenn man bey einer krummen Linie AM , sie mag für eine Beschaffenheit haben, was sie für eine will, die Abscissen AP , ferner die Semiordinate PM , und sodann mit der über den Scheitelpunkt verlängerten Abscisse PT die Tangente der krummen Linie, nemlich die Tangente TM in dem Punkt T vereinigt, so wird man dieses Dreieck bald bekommen. Dann man darf nur die der Semiordinate PM nächste Semiordinate pm , und sodann mit Pp aus dem Punkt der krummen Linie M die Parallellinie MR ziehen, so ist das $\triangle MRM$ dieses verlangte Dreieck. Dann nach den Grundsätzen der Aehnlichkeit ist das $\triangle MmR \sim \triangle TMP$ oder Tmp ; folglich wenn $PM = y$ und $AP = x$, so ist $Rm = dy$ und $MR = Pp = dx$, folglich da $mR:RM = PM:PT$, das ist $dy:dx = y:PT$

so ist die Linie $PT = \frac{y dx}{dy}$;

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle Linien dieser Gattung; man heist sie Subtangente; eine Subtangente PT ist allemal diejenige gerade Linie, welche durch die Tangente TM und die Semior-
dinate PM bestimmt wird; und bey allen nur denkbaren krummen Linien wird sie durch $\frac{y dx}{dy}$ ausgedruckt. Wenn man nun in einer gegebenen krummen Linie den Werth von $\frac{dx}{dy}$ u. s. w. durch die Differ-
entiation suchet, so wird sich die Sub-
tangente in endlichen Größen bestimmen lassen. Wir wollen ein Exempel von der Parabel geben. Man solle die Subtan-
gente bestimmen. Die Subtangente al-
ler krummen Linien heist $\frac{y dx}{dy}$; folglich
muß ich aus der Gleichung für die Para-
bel, welche $ax = y^2$ ist, einen Wehrt,
der dem obigen Ausdruck gleich ist, durch
die Differentiation suchen. In der Pa-
rabel ist

folglich differ-
enzirt:

$$ax = y^2$$

$$a dx = 2 y dy$$

$$dx = \frac{2 y dy}{a}$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{2 y^2}{a}$$

und wie man
aus dem Aus-
druck her-
nach die
Subtangen-
te selbst in
endlichen
Größen fin-
de;

Anwendung
auf die Sub-
tangente der
Parabel.

$$\frac{y dx = \frac{2y^2 dy}{a}}{dy} ; dy$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$$

Dann damit ich die Subtangente $\frac{y dx}{dy}$

bekomme, so muß ich dx und seinen Wehrt in der Parabel, das ist die ganze Gleichung beiderseits mit y multiplirciren, und hernach das Product mit dy beiderseits dividiren; die Subtangente in der Parabel ist also $= \frac{2y^2}{a}$; diese

aber läßt sich schicklicher ausdrucken; dann weil in der Parabel $ax = y^2$, so ist

$$\frac{2ax = 2y^2}{a} : a$$

$$\frac{2ax}{a} = \frac{2y^2}{a}$$

das ist, wenn man wirklich dividirt. $2x = \frac{2y^2}{a} = PT.$

Die doppelte Also ist in der Parabel die Subtangente
Abscisse ist
allemaal der allemaal $2x$, oder die doppelte Abscisse,
Subtangen-
te in der ge-
meinen Pa-
rabel gleich; se. Oder allgemein, weil in den Para-
beln

$$\begin{aligned} a^{m-1}x &= y^m \\ \frac{a^{m-1}dx}{dx} &= \frac{my^{m-1}dy}{my^{m-1}dy} \\ &= \frac{a^{m-1}}{a^{m-1}} \end{aligned}$$

$$\frac{y}{dy}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{a^{m-1}}$$

$$y^m = a^{m-1}x \text{ folglich}$$

$$\frac{my^m}{a^{m-1}} = \frac{ma^{m-1}x}{a^{m-1}} = mx.$$

Wie diese Regel auf Parabeln von höhern Gattungen angewendet werde,

Die Subtangente in der Parabel ist also so die Abscisse so vielmal genommen, als der Exponent von der Semiordinate y Einheiten hat.

§. 209. Wie man die Subtangente durch die Differentialrechnung finden kann, so findet man auch die Subnormallinie. Wir müssen vor allen Dingen erklären, was wir unter dieser Linie verstehen. Wenn man auf dem Punkt M der Tangente TM eine Perpendicularlinie HM dergestalt aufrichtet, daß sie endlich mit der Abscisse AH in dem Punkt H zusammen kommt, so heißt MH die Normal-, und PH die Subnormallinie, welche durch die Semiordinate PM und die Normallinie MH bestimmt wird. Ben M ist also, wie aus der Construction M in

von der Subnormallinie, was sie seye, und wie sie gleichfalls durch einen allgemeinen Ausdruck in allen Figuren bestimmt werden. Tab. IV. fig. 70.66. bel.

546 Geom. IV. Cap. Von der
 hellet, ein rechter Winkel. Demnach
 ist $PT:PM=PM:PH=\frac{PM^2}{PT}$

$$\text{das ist } \frac{y dx}{dy} : y = y : PH = \frac{y^2}{\frac{y dx}{dy}}$$

Da nun $y^2 : \frac{y dx}{dy} = y^2 \cdot \frac{dy}{y dx} = \frac{y^2 dy}{y dx} =$
 $\frac{y dy}{dx}$, so ist die Subnormallinie bey allen

nur denkbaren krummen Linien $= \frac{y dy}{dx}$.

Man kann also aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie ihre Subnormallinie bald finden. Es setze z. E. wir
 der die Parabel, in welcher

$$ax = y^2$$

$$\text{differentiirt } adx = 2y dy$$

$$\frac{adx}{2y} = dy$$

$$\frac{ay dx}{2y} = \frac{a dx}{2} = y dy$$

$$\frac{a dx}{2 dx} = \frac{1}{2} a = \frac{y dy}{dx}$$

In der Parabel ist die
 Subnormal-
 linie dem
 halben Parameter gleich.

Demnach ist in der Parabel die Subnormallinie dem halben Parameter gleich, folglich eine beständige Linie. Da nun
 in

in der Parabel, nach der 66. Fig. und dem §. 189. gegebenen Beweis $AF = \frac{1}{4}a$, so wird $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$, folglich $FH = FP + PH = x - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a = x + \frac{1}{4}a$. Da aber auch nach §. 189. $FM = x + \frac{1}{4}a$, so ist $FM = FH$, folglich das Dreieck FMH gleichschenkelig; weil ferner $TP = 2x$ nach §. 208. folglich weil $AP = x$, auch $TA = x$, und daher $TF = x + \frac{1}{4}a$, so ist auch $TF = FM = FH$; folglich kann aus F mit dem Radio TF ein Cirkel beschrieben werden, der durch die drei Punkte T , M und H gehen wird. Hieraus erhellet weiter, daß, weil das $\triangle FMH$ gleichschenkelig, und daher die Winkel FMH und FHM einander gleich sind, auch der Winkel

Tab. IV.
Fig. 66.

Eine wichtige Eigenschaft der Parabel wird hieraus noch erwiesen.

$\angle MMQ = \angle TMF$; dann
 $\angle TMH = \angle HMM$ als rechte Winkel;
 $\angle FMH = \angle HMQ$ weil $\angle FMH = \angle FHM$ und
 $\angle FHM = \angle HMQ$;
folglich

$\angle TMH - \angle FMH = \angle HMM - \angle HMQ$ das ist
 $\angle TMF = \angle MMQ$.

Warum alle in einen parabolischen Spiegel fallende Strahlen gegen den Brennpunkt F gebrochen werden, und daselbst vereinigt werden; welches auch die Erfahrung nach den Grundsätzen der Optik lehret.

Dahero müssen alle in einen parabolischen Spiegel einfallende Strahlen gegen den Brennpunkt F gebrochen und daselbst vereinigt werden; welches auch die Erfahrung nach den Grundsätzen der Optik lehret.

Wie man bey §. 210. Auf eine ähnliche Weise
andern krummen Linien findet man bey andern krummen Linien
die Subtangente und Subnormalis.
den Linien Z. E. bey den Ellipsen ist

Die Subtan-
genten und

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ folglich}$$

Subnorma-

$$ay^2 = abx - bx^2 \text{ und differentiire}$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx = (ab - 2bx)dx$$

$$: ab - 2bx$$

len finde,

wird durch

einige Exem-

pel erläutert.

$$\frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx$$

$$\frac{2ay^2}{ab - 2bx} = \frac{y}{dy} \cdot dx$$

$$\frac{2ay^2}{ab - 2bx} = \frac{ydx}{dy}, \text{ oder wenn}$$

man den Wehrt von $2ay^2$ substituirt,

$$\frac{2abx - 2bx^2}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$$

= der Subtangente; Eben so ist im Ein-

fel $ax - x^2 = y^2$ folglich

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$: a - 2x$$

$$dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$$

$$\frac{y}{dy} \cdot dx$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{2 y^2}{a - 2x}, \text{ das ist, wenn}$$

man gleiches für gleiches setzt,

$$\frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$$

die Subtangente des Circels; und seine Subnormale ist, weil nach der bereits gesuchten Differentiation,

$$a dx - 2x dx = 2y dy \text{ oder}$$

$$(a - 2x) dx = 2y dy \text{ und}$$

$$\text{-----} : dx$$

$$a - 2x = \frac{2y dy}{dx}$$

$$\text{-----} : 2$$

$$\frac{1}{2}a - x = \frac{y dy}{dx}$$

der halbe Diameter weniger die Abscisse; folglich fangen sie alle in dem Mittelpunkte an, weil $\frac{1}{2}a$ dem Radius gleich ist, und man in der gegebenen Gleichung die Abscisse von dem Scheitelpunkt an rechnet. Von dem Scheitelpunkt an rechnet man weiter um. Unsere Leser sehen aus diesen Exempeln schon, wie weit sich diese einige Aufgabe aus dieser von den Subtangenten und Subnormalen erstreckt; wir wollen daher nicht ohne Noth weitläufig seyn; und nur die einige Logistik noch betrachten.

Tab. IV. §. 211. Man ziehe die Tangente der
Fig. 69. logarithmischen Linie TM , so ist, wenn,
wie in der Fig. 70. die übrige Linien ge-
zogen werden,

Warum man
besonders
von der loga-
rithmischen
Linie noch
handle, und
ihre Subtan-
gente bestim-
me:

$MR:Rm = PM:PT$, das ist

$$dy:dx = y:\frac{y dx}{dy}$$

Eben so wird bey einer jeden größern
oder kleinern Abscisse v , und Semiordi-
nate z , die correspondirende Subtangente
seyn $\frac{x dv}{dz}$. Nun gehen die Abscissen der

Ausführli-
cher Beweiss,
daß die Sub-
tangente der
Logistik eine
unveränder-
liche Linie
seye.

Logistik in einer geometrischen Progres-
sion fort, folglich sind ihre Differentialien
einander gleich; dann die Geschwindig-
keit, mit deren sie sich verändern, ist im-
mer einerley; oder anders die Sache aus-
zudrücken, die Differenz in einer arith-
metischen Proportion ist immer eben die-
selbe; sie mag noch so groß oder noch so
klein seyn. Demnach ist $dv = dx$.
Die Semiordinaten hingegen haben in
der Logistik kraft der gegebenen Erklärung
eine geometrische Verhältniß zu einander;
das ist, wenn sie y und z heißen:

$$y:z = y + dy : z + dz \text{ oder versetzt,}$$

$$y:y + dy = z:z + dz \text{ folglich auch}$$

§. 60.

$$y:(y + dy) - y = z:(z + dz) - z$$

das ist

$$y:dy = z:dz, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz} \quad \text{nun ist}$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dv} \quad \text{folglich multiplicire}$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{z dv}{dz}; \quad \text{da nun diese beide}$$

Ausdrücke Subtangenten anzeigen; so folgt daraus, daß alle Subtangenten der Logistik einander gleich, und also ihre Subtangenten eine beständige Linie seyen. Weitere Anwendungen wollen wir von dieser Gattung der Differentialgleichungen nicht anführen. Unsere Leser begreifen von selbst, daß es noch eine Menge geben werde, die aber alle mit dem gegebenen eine Aehnlichkeit haben. Wir handeln daher jetzt eine andere Differentialmaterie ab; welche mit dem sogenannten Maximo und Minimo sich beschäftigt.

§. 212. Wenn eine GröÙe so lang Erklärung wächst, bis sie auf einen gewissen Grad derjenigen oder Punkt kommt, und hernach entweder GröÙen, welche ein Maximum oder Minimum haben; der stille steht, oder wieder abnimmt, so sagt man von ihr, sie habe ein Maximum. So hat diejenige krumme Linie, welche man den Cirkel nennet, ein Maximum; dann wenn sie sich so weit von dem Cirkel und dem Diameter entfernt hat, daß ihre Distanz seiner Helfte gleich ist, so hat sie ihr Maximum erreicht, und lehret von

M m 4

selbis

selbigem Punkt an wiederum näher zur Ase oder zum Diameter. Eben so hat die Ellipsis ein Maximum. Die Parabeln und Hyperbeln hingegen wachsen unendlich fort, oder entfernen sich von ihrer Ase bis ins unendliche; man kann also nicht sagen, daß sie ein Maximum haben; ausser wenn man sagen wollte, die unendliche Entfernung von der Ase seye ihr Maximum. Dieser Ausdruck aber ge-

hört nicht hieher. Ein Minimum ist, wenn eine Grösse sich bis auf einen gewissen Grad vermindern läßt, oder kleiner wird, hernach aber entweder stille steht, oder aber wieder grösser wird. Bey krummen Linien bedient man sich zu Bestimmung der Sache der Semiordinaten und Abscissen, z. E. man sagt, die größte Semiordinate vom Cirkel ist der Radius, u. s. w. bey andern Figuren kann man das Maximum oder Minimum überhaupt betrachten. 3. E. wenn ich frage, wie muß ich eine Linie theilen, daß durch die Multiplication der beeden Theile das größte Viereck, das aus dieser Linie möglich ist, entstehe? oder wie muß der Zimmermann einen gegebenen Balken hauen, daß der Balkenkopf das allergrößte Viereck, das sich daraus hauen läßt, vorstelle? oder welches ist das größte Dreieck, das in einen halben Cirkel beschrieben werden kann? u. s. w. Aus allen diesen

Wie man das Maximum und Minimum überhaupt betrachtet und am richtigsten sich vorstellen könne;

Wie man das Maximum und Minimum überhaupt betrachtet. 3. E. wenn ich frage, wie muß ich eine Linie theilen, daß durch die Multiplication der beeden Theile das größte Viereck, das aus dieser Linie möglich ist, entstehe? oder wie muß der Zimmermann einen gegebenen Balken hauen, daß der Balkenkopf das allergrößte Viereck, das sich daraus hauen läßt, vorstelle? oder welches ist das größte Dreieck, das in einen halben Cirkel beschrieben werden kann? u. s. w. Aus allen diesen

Ere

Differential- u. Integralrechnung. 553

Erklärungen und Exempeln begreift man Warum das nun leicht, daß das Differentiale von einem Maximo oder Minimo allemal null seyn werde. Dann wenn es das Maximum seyn solle, so ist es ja, in so fern es das Maximum ist, unveränderlich, und dann weder grösser noch kleiner werden; eine beständige oder unveränderliche Grösse aber hat kein Differentiale, oder sein Differentiale ist allemal nulle; folglich wenn eine solche Grösse, die ein Maximum oder Minimum seyn solle, differentiiert wird, so muß ich ihr Differentiale allemal $= 0$ setzen; da sich dann bald ihre Grösse ergeben wird.

§. 213. Nun habe ich den Begriff von dem, was ein Maximum oder Minimum heisst, hinlänglich erklärt. Wenn man demnach die Linie DE also theilen sollte, daß der eine Theil die Grundlinie, und der andere die Höhe des größten Vierecks, das sich daraus bestimmen läßt, abgeben sollte, so wird sich die Frage bald auflösen lassen. Man nenne $DE = a$, und weil wir den Punkt, wo sie getheilt werden solle, noch nicht wissen, so wollen wir die Grundlinie $DC = x$ nennen, folglich wird die noch übrige Linie, oder die Höhe des Vierecks $a - x$, und das ganze Viereck $(a - x)x$ heissen. Dieses soll nun ein Maximum seyn. Man multiplicire nun wirklich; so ist

$$Mm \quad x$$

$$ax$$

$$ax - x^2 = \text{Maxim. und}$$

$$adx - 2x dx = 0. \text{ Folglich}$$

$$adx = 2x dx$$

$$: dx$$

$$a = 2x \text{ Dahero}$$

$$x \text{ allein oder } x = \frac{1}{2}a. \text{ Also muß}$$

die Linie in zwey gleiche Theile getheilet werden, da dann die Grundlinie und Höhe gleich sind; folglich ist das Quadrat das größte Viereck, das aus einer gegebenen Linie gemacht werden kann. Wenn

Welches das größte Dreieck sey, das man auf den Durchmesser eines gegebenen Kreises aufrichten könne; langt man das größte Dreieck, das auf den Durchmesser des Kreises beschrieben werden kann, so schlägt man einen gleichen Weg ein. Dann es ist eben so viel, als ob man das größte rechtwinklichte Dreieck in Kreis verlangte; weil alle Winkel an der Peripherie, die auf einem halben Kreis stehen, rechte Winkel sind. Nun

Tab. I. Fig. 21. sene nach der 21. Fig. $AB = a$, AD die Seite des Dreiecks $= x$, so wird, weil bey D ein rechter Winkel ist, $DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$ und der Inhalt des Dreiecks selbst $AD \cdot DB = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ ein Maximum;

folglich auch $x^2 a^2 - x^4 = \text{Maxim. dahero}$
differentiirt $2a^2 x dx - 4x^3 dx = 0.$

Folglich

$$2a^2 x dx = 4x^3 dx$$

$$: dx$$

$$2a^2 x$$

$$\begin{array}{r} 2a^2x = 4x^3 \\ \hline a^2 = 2x^2 \\ \hline \frac{1}{2}a^2 = x^2 \\ \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = x. \end{array}$$

demnach ist es das gleichschenklige Dreieck; dann weil $AD^2 = x^2 = \frac{1}{2}a^2$, so muß auch $DB^2 = \frac{1}{2}a^2$ seyn; weil $AD^2 + DB^2 = AB^2 = a^2$ nach dem pythagorischen Lehrsatz. Hieraus erhellet nun weiter, daß das größte Viereck, das in einem gegebenen Cirkel beschrieben werden kann, ein Quadrat seye; weil das Dreieck ADB die Hälfte von diesem Maximo ist.

Welches das größte Viereck seye, das in einem gegebenen Cirkel sich beschreiben lasse;

§. 214. Wir wollen auch Exempel von den krummen Linien in Absicht auf ihre Abscissen, Semiordinaten u. s. w. geben. Es ist klar, daß bey solchen krummen Linien, die ein Maximum haben, die Tangente unendlich groß wird, folglich auch die Subtangente; daher die Subnormallinie null ist. In solchen Fällen setzt man also $\frac{y \, dy}{dx} = 0$; wenn aber die

bedeutet werden; dieses ist, so muß auch $dy = 0$ seyn. Zuweilen ist es auch umgekehrt, daß nemlich die Subtangente null und die Subnormallinie unendlich wird. Der erstere Fall aber kommt häufiger vor. Da wir nun wissen,

welches die
größte Ab-
scisse im Ein-
kel seye.

sen, daß der Cirkel ein Maximum hat;
so wollen wir seine Gleichung betrachten:
sie heißt

$$ax - x^2 = y^2 \quad \text{folglich differentiirt,}$$

$$a dx - 2x dx = 2y dy$$

$$\frac{a dx - 2x dx}{2y} = dy = 0.$$

$$\frac{a dx - 2x dx}{2y} = 0$$

$$\frac{a dx}{2y} = \frac{2x dx}{2y} : dy$$

$$a = 2x$$

$$\frac{1}{2}a = x.$$

Wenn also die Abscisse dem halben Dia-
meter gleich ist, so wird die größte Or-
dinate gezogen werden können; nem-
lich der Radius. Man darf nur den
Wehr von x in die Gleichung setzen, so fin-
det man $ax - x^2 = \frac{1}{2}a a - \frac{1}{4}a a = y^2$ folg-
lich $\frac{1}{2}a = y$. Eben so gehet man bey an-
dern krummen Linien zu Werke.

Exempel in
Absicht auf
das Mini-
mum;

Tab IV.
Fig. 66.
welches die
kleinste Linie
seye, die man

§. 215. Wie man das Maximum
findet, so kann man auch das Minimum
finden. Man solle aus H diejenige Linie
an die krumme Linie AM ziehen, welche
die kleinste unter allen seye, die man aus
gedachtem Punkt ziehen kann. Man
seye wie bisher $AP = x$ $PM = y$ $AH = a$

so

Differential- u. Integralrechnung. 557

so ist $PH = c - x$, nun ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatz $MH^2 = PM^2 + PH^2$, gegeben
 folglich $MH^2 = y^2 + (c - x)^2$, da nun Punkt an eine gegebene
 die Linie MH die kleinste seyn solle, so trumme Linie
 muß auch ihr Quadrat das kleinste seyn; nie sieben
 folglich $MH^2 = y^2 + (c - x)^2$ ein Minimum; könne;
 oder wenn man wirklich multiplis
 cirt, $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = \text{Min.}$
 folglich $2ydy - 2cdx + 2xdx = 0$.

$$\frac{2ydy - 2cdx + 2xdx}{2} = 0$$

Wenn man also den Wehrt von ydy
 in einer gegebenen krummen Linie für ydy
 setzt, so wird man die gesuchte Linie fin
 den. Z. E. in der Parabel:

$$ax = y^2 \text{ folglich}$$

$$adx = 2ydy \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}adx = ydy$$

Hier haben wir
 schon den Wehrt von ydy ; diesen setzen
 wir in der obigen Gleichung; da dann
 herauskommt,

$$\frac{1}{2}adx - cdx + xdx = a.$$

$$\frac{\frac{1}{2}a - c + x}{1} = 0$$

$$\frac{1}{2}a - c + x = 0 \text{ demnach}$$

$$x = c - \frac{1}{2}a \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}a = c - x.$$

Da nun in der Parabel die Subnormal
 Linie

linie $\frac{1}{2}a$ heißt §. 209. so ist $PH = \frac{1}{2}a$; folglich muß MH , die gesuchte Linie, die Normallinie seyn; welche auf die Krümme perpendicular gezogen werden muß. Eben so findet man bey den übrigen Augelschnitten, daß die von der Axe an die Peripherie oder an den Perimeter gezogene Perpendicularlinie die kürzeste unter allen seye, welche aus einem gegebenen Punkt gezogen werden können. Das ist

Wie in der ganzen Natur ein Maximum und Minimum Statt finde;

nun die Anwendung der Differentialrechnung auf die Lehre von dem Maximo und Minimo; welche um so wichtiger ist, je mehr man aus der Betrachtung der Werke Gottes in der Natur wahrnimmt, daß überall das Maximum und das Minimum darinnen herrschet; wie dann besonders der erst kürzlich durch den Tod der gelehrten Welt allzufrüh entriffene Präsident der Königl. Preuß. Academie Herr v. Maupertuis den Grundsatz des Minimi in der Natur nicht nur festgestellt, sondern auch zum Beweis des Daseyns eines gütigen und weisen Schöpfers mit einem so lebhaften als scharfsinnigen Witz angewendet hat.

Eine Entdeckung, deren Anwendung man besonders dem Herrn Präsidenten von Maupertuis zu verdanken hat.

Was Integralen heiße, oder was die Integralrechnung seye.

§. 216. Wenn man diejenige Größe, durch deren Differentiation ein gegebenes Differentiale entstanden, genau finden kann, so heißt es, man habe das Differentiale integrirt, und diese Kunst wird nun überhaupt die Integralrechnung ge-

ge-

genannt. Das Zeichen der Integration ist ein \int ; so wird das Integrale von dx geschrieben $\int dx$, und das von $2x dx$ schreibt man $\int 2x dx$ u. s. w. Die Deutsche haben deswegen das \int zum Zeichen der Integration erwählt, weil sie das Integrale als die Summe aller Differentialen oder unendlich kleinen Theile der Grösse ansehen; daher sie durch das lateinische \int die Summe bezeichnen. In England hingegen heisst die Differentiir-Kunst, wie wir schon gemeldet, eine Fluxionenrechnung, und daher das, was wir integrieren nennen, die umgekehrte Fluxionenrechnung. Nachdem wir nun diese Erklärung vorausgeschickt haben, so werden sich die Hauptregeln des Integrirens bald verstehen lassen. Das Integrale von dx ist x , und von $dx + dy$ ist es $x + y$ u. s. w. Das hat keine Schwürigkeit; weil ferner das Differentiale $x dy + y dx$ aus xy entstanden ist, so muß sein Integrale, das ist, $\int (x dx + y dx)$ auch xy seyn. Und weil das Differentiale von $x^2 = 2x dx$, von x^3 aber $3x^2 dx$, und allgemein von x^m , $mx^{m-1} dx$ §. 203. so sind die Integralien davon x^2 , x^3 , x^m u. s. w. Eben so ist das Integrale von

$$\frac{n-m}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x}, \text{ und } \int \frac{y^2}{y^2} dy = y$$

$= \frac{x}{y}$; wie man aus §. 203. leicht ersehen
het. Man hat daher nur auf die Art
und Weise Achtung zu geben, wie ein
Differential entsteht, wenn man bemerkt
het ist, sein Integrale wieder zu suchen.

§. 217. Will man nun eine kurze
Anzeige der gewöhnlichen
Integralformeln,
Regel sich bekannt machen, so darf man
nur alle Formeln nach der Ordnung hin-
schreiben; da dann seyn muß

worach die

Integration

sich richtet.

I. $\int dx = x$ oder $x \mp a$.

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ oder $x \mp y \pm a$.

III. $\int (x dy + y dx) = xy$ oder $xy \mp a^2$

IV. $\int a dx = ax$

V. $\int (mx^{m-1} dx) = x^m$

VI. $\int \left(\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx \right) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

VII. $\frac{\int (y dx - x dy)}{y^2} = \frac{x}{y}$.

Wie man
beym Inte-
griren die be-
ständigen
Größen findet

Das sind alle Formeln, die einem vor-
kommen können. Wir haben bey der
ersten, zweiten und dritten beständige
Größen addirt und subtrahirt, welches
unsere Leser nicht befremden wird, wenn
sie sich noch erinnern, daß die beständige
Größen durch die Differentiation Null
werden; folglich muß man sie bey dem
Integriren wieder addiren; was es aber
für

für Gröſſen ſeyn müſſen, wird man aus und wie dieſe der Natur der Gleichung, aus den Fi- Kunst beſon- guren, nach welchen ſich die Gleichung ders durch richtet, und beſonders aus der Uebung die Uebung und Auf- und da am beſten lernen. Z. E. wenn merksamkeit ich das Differentiale der Hyperbel $2ydy = xdy + ydx$ hätte, ſo iſt ſein Inte- auf die Glei- grale $y^2 = xy$; da mir dann gleich eins chungen und Figuren er- fallen wird, daß die Gleichung zur Hy- lernet werde. perbel zwiſchen den Aſymptoten gehöre, und in dieſer Gleichung $y^2 = a^2 + yx$ ſeyn; ſolglich muß ich bey der Integra- tion a^2 addiren. u. ſ. w. Doch läugnen wir nicht, daß die Addition und Subtra- ction der beſtändigen Gröſſen je und je ſchwer zu beſtimmen ſeye; beſonders wenn einige differenzirte Glieder ſich gegen ein- ander aufheben u. ſ. w. Die meiste Schwürigkeiten aber wird derjenige übers- winden, der ſich nach den bereits ange- führten Regeln fleißig übet.

§. 218. Unter den angezeigten For- Welche Inte- meln kommt die fünfte und ſechste am öf- grationsfor- feſten vor. Man kann daher eine kur- ze Regel, ſie zu integriren, ſich um ſo meln am bäu- eher bekannt machen, weil es Anfängern ſigſten vor- oft ſchwer fällt, die Aehnlichkeit einer ge- gebenen Formel mit den vorgeschriebenen kommen; ſogleich einzusehen. Z. E. $-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ iſt ein Differentiale, das dem in der ſechs- ten Formel ganz ähnlich iſt, und nach ſel- biger integrirt wird; ungeachtet ein An- ſau

sänger die Aehnlichkeit nicht sogleich bemerken wird. Die allgemeine Regel für die fünfte und sechste Formel ist also diese: Man vermehrt den Exponenten der veränderlichen Grösse um eins, und dividirt hernach alles mit dem in das Differentiale der ersten Dignität der veränderlichen Grösse (dx) multiplicirten neuen Exponenten. Zum Ex.

$m x^{m-1} dx$ soll integrirt werden. Die veränderliche Grösse heisst x , ihr Exponent ist $m-1$, den vermehrt man um eins, so hat man $m x^{m-1+1} dx = m x^m dx$; das Differentiale der ersten Dignität von der veränderlichen Grösse ist dx , dieses multiplicirt man mit dem neuen Exponenten $m-1+1 = m$; so hat man $m dx$; mit diesem Product dividirt man $m x^m dx$, so hat man $\frac{m x^m dx}{m dx} = x^m$ das Integral

le von $m x^{m-1} dx$. Eben so findet man das Integrale von $-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} dx =$
 $\frac{-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}+1} dx}{-\frac{5}{3}+1} = \frac{-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}+\frac{3}{3}}}{-\frac{5}{3}+\frac{3}{3}} dx =$
 $\frac{-\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx}{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = \sqrt[3]{x^2};$

und das Integrale von $x^m dx =$
 $\frac{x^{m+1} dx}{m+1} = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$, dann wenn

man

Differential u. Integralrechnung. 563

man wiederum dieses Integrale wirklich differentiiert, so kommt heraus

$$\frac{m+1}{m+1} x^{m+1-1} dx = x^m dx.$$

Man siehet hieraus die Allgemeinheit unserer Regel; dahero Anfänger wohl thut, wenn sie sich allerhand Exempel von dieser Art vorgeben, und die Regel selbst in eine fertige Übung bringen.

S. 219. Nunmehr können wir schon den Nutzen der Integralrechnung bey der Quadratur der krummen Linien zeigen. Wenn zwei Semiordinaten parallel und einander so nahe gezogen werden, daß der Bogen *Mm* von einer geraden Linie nicht abweicht, so ist in der Figur das kleine Viereck *PMmp* oder *Pp.pm* das Element oder das Differentiale des Raums *Amp*. Nun ist *MR = Pp = dx* und *pm = y*, folglich *Pp.pm = y dx*. Das heißt, *y dx* ist die Geschwindigkeit mit welcher sich die Fläche *AMP* verändert. Wenn man also aus einer gegebenen Gleichung *y dx* findet, und hernach integriren kann, so wird der Raum einer solchen Figur gefunden. Z. E. in der Parabel ist: $ax = y^2$ folglich

$$\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = y dx \text{ dieses}$$

Nun

Von der Quadratur der krummen Linien. Tab. IV. Fig. 70. Die sich parabolische Stücke durch Hüfte dieser Rechnung vollständig quadrieren lassen.

integriert, gibt $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \int y dx.$
§. 216.

Nun ist $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$ folglich

$$\frac{2}{3}yx = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}; \text{ dem}$$

und wie Ar-
chimedes
schon diese
Quadratur
gewußt habe.

nach ist der parabolische Raum $Apm = \frac{2}{3}xy$ also vollkommen quadriert. Das heißt, dieser Raum ist $\frac{4}{3}$ von dem Rectangulo aus der Abscisse in die Semior-
dinate, oder dieses Rectangulum xy ver-
hält sich zum parabolischen Raum Amp
wie 3 zu 2. Eine Quadratur, welche
Archimedes schon gefunden hat. Ob
er sie aber durch die Fluxionenrechnung,
oder auf eine andere Weise zuerst gefun-
den hat, ist nicht bekannt. Im erstern Fall
müßten die Alten viele Künste, und auch
die Differentiationskunst gewußt haben,
welche nach der Hand verloren giengen,
und erst von den Neuern wiederum er-
funden wurde. Allein es läßt sich die
Quadratur der Parabel auch ohne diese
Rechnung finden; nur ist es ungleich
mühsamer, wenn man die Fluxionenme-
thode nicht dazu braucht; daher man
eben nicht nöthig hat, zu sagen, Archi-
medes habe wirklich diese neuersundene
Kunst gewußt. Aber eben dieses gereicht
ihm und den Alten überhaupt zu einem
desto größern Ruhm; weil sie ohne die
neuere Mittel, die einem die Rechnung

un-

Differentiál u. Integralrechnung. 565

ungemein erleichtern, so schwere Aufgaben auseinander gewickelt und aufgelöst haben.

S. 220. Wenn man eine Parabel quadrieren kann, so lassen sich alle durch die allgemeine Rechenkunst quadrieren. Dann es seye $a^n x^m = y$ so ist $\sqrt[r]{a^n x^m} = a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} = y$ und $a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} dx = y dx$

$$\text{dahero } \frac{r}{m+r} a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+r}{r}} = \int y dx.$$

Da nun $a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} = y$, so ist

$$\frac{r}{m+r} yx = \int y dx.$$

Man darf also für r und m nur Zahlen setzen, so wird man allerley Parabeln wirklich quadrieren können. Nun ist die Frage, ob man nicht auch den Cirkel durch Hülfe der Fluxionenrechnung quadrieren könne? Wir wollen einen Versuch wagen, da sich dann gleich der Nutzen der Newtonischen Regel für die Potenzen zeigen wird. Es seye der Diameter $AB = 1$. Die Abscisse $AD = x$, so ist $DB = 1 - x$, und die Semiordinate ED

Ob man den Cirkel durch diese Rechnung quadrieren könne?

Tab. II. Fig. 37.

Nun 3 sol:

solle y heißen. Folglich

$$y^2 = (1 - x)x = x - x^2$$

$$y = \sqrt{(x - x^2)} = (x - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$y dx = dx \sqrt{(x - x^2)} = dx \cdot (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Wenn man nun das Integrale aus dem letzten Auszug finden kann, so ist der Cirkel quadriert. Man ziehe also aus $x - x^2$ die Quadratwurzel nach der Newtonischen Methode, Regel aus, da dann

den Cirkel zu quadriren, Newton gesucht habe:

$$P = x, Q = -\frac{xx}{x} = -x$$

$$m = 1, n = 2. \text{ Folglich}$$

$$\frac{P^m}{n} = x^{\frac{1}{2}} = A,$$

$$\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot -x = -\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = B,$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \cdot -x = -\frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} = C. \text{ u. s. w.}$$

Das gibt nun eine unendliche Reihe, in welchem $y dx = x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} dx$ u. s. w. folglich

$$\int y dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{7}{2}} \text{ u. s. w.}$$

Das ist die Quadratur des Stückes vom Cirkel AED ; weil sie Newton gefunden, Herr v. Leibniz hat die folgende gegeben, und

Differential- u. Integralrechnung. 567

und gezeigt, daß wenn der Radius $= 1$, so Wie der Herr
 fene der Cirkelbogen von $45^\circ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ von Leibnitz
 $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. f. w. Dann man zie: Tab. III.
 he die Linie Cb der andern CB so nahe, daß Fig. 57.
 der Bogen Mm einer geraden Linie gleich diese Aufga-
 kommt; so ist, wenn man Bu auf Cb per- be aufzulösen
 pendicular zieht, und der Radius CA sich bemühet
 $= 1$ die Tangente $AB = t$ gesetzt wird, habe;
 CB , die Secante des Bogens AM nach
 dem pythag. Lehrsat

$$= \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{1 + tt.} \quad \text{Da nun}$$

$$CB : CA = Bb : Bu \quad \text{so ist}$$

$$\sqrt{1 + tt} : 1 = dt : Bu = \frac{dt}{\sqrt{1 + tt}}$$

Dann Bb ist das Differentiale von der
 Tangente AB , folglich wird es durch dt
 ausgedrückt. Es ist aber ferner

$$CB : Bu = CM : Mm; \text{ das ist}$$

$$\sqrt{1 + tt} : \frac{dt}{\sqrt{1 + tt}} = 1 ;$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + tt} \cdot \sqrt{1 + tt}} = \frac{dt}{1 + tt}$$

Demnach ist das Differentiale von dem
 Bogen $AM = \frac{dt}{1 + tt}$; dieses wird nun

entweder nach der Newtonischen Regel
 oder durch das gewöhnliche Dividiren,

$$\text{weil } \frac{dt}{1 + tt} = \frac{1 \cdot dt}{1 + tt}, \text{ in eine unendliche}$$

und wie er gefunden, daß der rectifizierte Bogen von 45° $= 1 - \frac{1}{2}$ $+ \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ $+ \frac{1}{32}$ u. f. w. Reihe verwandelt; da dann $tt = 1$ wird, wenn der Bogen 45° hält, weil in diesem Fall die Tangente dem Radius, welcher hier eins gesetzt wurde, gleich wird. Da es dann nach §. 73. folgende Progression gibt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ u. f. w. wodurch der rectifizierte Bogen von 45° ausgedrückt wird. Ein Ausdruck, der uns nun auch auf die Rectification der krummen Linien führt.

§. 221. Die Rectification der krummen Linien ist nach der Bedeutung dieses Wortes nichts anders, als die Kunst, eine krumme Linie in eine gerade Linie zu verwandeln, oder eine gerade Linie zu erfinden, welche den gegebenen krummen Linien gleich seye. Daß nun dieses möglich seye, erhellet daraus, weil eine jede krumme Linie aus unendlich viel unendlich kleinen geraden Linien bestehet, oder weil man sich selbige wenigstens also vorstellen kann. Darauf kommt demnach alles an, daß man einen solchen unendlich kleinen Theil der krummen Linie findet und hernach ihn integrirt. Zur Erfindung des unendlich kleinen Theils ist uns der pythagorische Lehrsatz, und zu seiner Integration die Newtonische Regel von Ausziehung der Wurzeln behülfslich. Dann nach jenem ist mM ein solch unendlich kleiner Theil der krummen Linien, man mag sie auf der convergen oder

Wie das Element einer zu rectificiren den krummen Linie ausdrückt werde; Tab. IV. Fig. 70. 71.

Differential u. Integralrechnung. 569

über hohlen Seite betrachten, allemal
 $= \sqrt{(mR^2 + RM^2)}$ das ist in Buchsta-
 ben $mM = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; daher darf
 man nur aus der Gleichung für die krum-
 melinie das Element mM oder $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ Anwendung
 und hernach die Wurzel durch die Appro- der Rectifica-
 ximation suchen. Z. E. in der Parabel ist tionenregel
 auf die Pa-
 rabel;

$$ax = y^2 \text{ und}$$

$$a dx = 2y dy \text{ dieses quadriert, gibt}$$

$$a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$$

$$\text{-----} : a^2$$

$$dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$$

$$dy^2 = dy^2 \text{ addirt, gibt}$$

$$dx^2 + dy^2 = dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$$

$$\text{-----} : \sqrt{}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{dy^2 a^2 + 4y^2 dy^2}{a^2}}$$

$$= dy \sqrt{\frac{a^2 + 4y^2}{a}}$$

$$\text{Wenn ich nun } \frac{dy \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a} \text{ integri-$$

ren kann, so habe ich den parabolischen
 Bogen gefunden, oder in eine gerade Linie
 verwandelt. Man versuche es daher, Nächst Anwei-
 ge des größten-
 Nutzen, den
 die Newton's-
 sche Approxi-
 mationäre-

N n 5 und

gel hier auf
fert.

und ziehe nach der Newtonischen Regel
aus $a^2 + 4y^2$ die Quadratwurzel aus;
da dann $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$ und

$$Q = \frac{4y^2}{a^2} \text{ folglich}$$

$$\frac{m}{P^n} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{n} A Q = \frac{\frac{1}{2} a \cdot 4 y^2}{a^2} = \frac{2 y^2}{a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{1}{4} \frac{2 y^2}{a} \cdot \frac{4 y^2}{a^2} = -\frac{2 y^4}{a^3} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} C Q = -\frac{1}{8} - \frac{2 y^4}{a^3} \cdot \frac{4 y^2}{a^2} = -\frac{4 y^6}{a^5} = D$$

u. f. w.

Folglich ist $\frac{dy \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a} = \frac{ady}{a}$ das ist

$$= dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} \text{ u. f. w.}$$

und das Integrale oder $\int \frac{dy \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a}$

$$= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} \text{ u. f. w.}$$

Allgemeine

beist der gezei-
benen Regel:

Auf diese Weise werden nun alle krumme
Linien rectificirt; wenn man nur die
Newtonische Regel schicklich dabey an-
bringt. Man sieht hieraus schon den

vors

Differential u. Integralrechnung. § 71

vorzüglichsten Nutzen dieser höchstbrauchbaren Regel, welche wir, wenn wir weiter häufig seyn wollten, mehr als zwanzigmal bei der Rectification der krummen Linien anbringen könnten; allein uns genügt, an einem Exempel gewiesen zu haben, wie man die andere zu behandeln. Uebrigens ist ohne unser Erinnern klar, daß man die Krümme nicht ganz genau finden kann, weil das Integrale eine unendliche Reihe gibt.

Warum man bei der versuchten Rectification die Krümme nicht ganz genau finden könnte?

§. 220. Es ist noch übrig, daß wir zeigen, wie man durch Hülfe der Integralrechnung aus der gegebenen Tangente oder Subtangente u. s. w. die Gleichung für die krumme Linie finde, deren Tangente sie ist. Alle Subtangenten werden, wie wir oben gehört, durch die

Wie man durch Hülfe der Integralrechnung aus der gegebenen Subtangente u. s. w. die krumme Linie finden könne.

allgemeine Differentialformel $\frac{y dx}{dy}$ ausgedruckt;

wird nun ein anderer Ausdruck für die Subtangente, z. E. der Ausdruck

$\frac{2y^2}{a}$ gegeben, so muß er dem obigen vollkommen gleich seyn.

Nun wollen wir die krumme Linie suchen, deren Subtangente

$\frac{2y^2}{a}$ ist; Es ist klar, daß

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{2y^2}{a} \text{ folglich}$$

$y dx$

$$aydx = 2y^2 dy$$

$$\frac{aydx = 2y^2 dy}{y} :$$

$$adx = 2y dy, \text{ dieses integrirt, gibt}$$

$$ax = y^2 \text{ eine Gleichung für die}$$

und wie man Parabel. Auf diese Weise lassen sich eine Menge krummer Linien bestimmen, besonders ne Menge krummer Linien bestimmen, aus der gegebenen Subtangente der Eine ist besonders noch merkwürdig, nemlich die Logistif, nur die Logistif finden, griff von den logarithmischen Differentias, sondern auch den Ausdruck für die logarithmische Differentia, den bestimmen können; Wir wissen aus §. 211. daß ihre Subtangente eine beständige Linie ist; nun wollen wir umgekehrt diejenige krumme Linie suchen, deren Subtangente unveränderlich ist. Es seye demnach die Subtangente $= a$, oder welches zu unserm Vorhaben einen noch schicklichen Ausdruck gibt, $= 1$; weil 1 so gut unveränderlich ist als a . Diesem zu Folge wird die Subtangente algebraisch ausgedruckt

Ausführlicher Beweis, daß das logarithmische Differentiale von y seye $\frac{dy}{y}$;

$$\text{seyn } \frac{y dx}{dy} = 1.$$

$$\frac{y dx}{dy} = 1 \cdot dy$$

$$y dx = dy$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{y}} = \frac{dy}{y}$$

$$dx = 1 dy; \text{ weil } x = 1 \cdot y \text{ §. cit. folgl.}$$

$$\frac{dy}{y} = 1 \cdot dy.$$

Hier

Differential u. Integralrechnung. 573

Hier haben wir also einen allgemeinen Ausdruck für alle logarithmische Differenzialien; z. E. das logarithmische Differenziale von z ist $\frac{dz}{z}$, das von x ist $\frac{dx}{x}$ wer ihn erfunden habe; das von v ist $\frac{dv}{v}$ u. s. w. Ein Ausdruck

den der berühmte Herr Joh. v. Bernoulli und wie er erfunden, und ihn besonders bey den Exponentialgrößen gemeinnützig gemacht hat. Dann eine Exponentialgröße ist diejenige, deren Exponent veränderlich ist. z.

E. x^y , z^x u. s. w. Wenn ich also x^y differenziren solle, so darf ich diese Größe nur einer andern z. E. der Größe z gleich setzen, und hernach den gegebenen Regeln zu Folge differenziren. Es setze also $x^y = z$ folglich logarithmisch ausgedruckt, $y \ln x = \ln z$; §. 95. u. differentiirt

$$y \ln x + \frac{y dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

-----.

$$x^y \ln x + \frac{zy dx}{x} = dz. \quad \text{Wenn man}$$

nun den Wehrt von z nemlich x^y in der Gleichung wieder setzt, und sich noch erinnert, daß $\frac{x^y}{x} = x^{y-1}$ setze, wie wir

§. 59. bewiesen, so hat man

x^y

und wie man
es wiederum
integriert;

$$x^y l x dy + y x^{y-1} dx = dz; \text{ das}$$

Differentiale von der Exponentialgröße x^y . Will man ein solches Differentiale wieder integrieren, so muß man an das, was wir von unendlichen Ketten gesagt haben, zurück denken. Wir haben bewie-

sen, daß
Integrale
davon eine
unendliche
Kette gebe;

sen, daß $l. dy = \frac{dy}{y}$; nun wollen wir die

gegebene Größe y um 1 vermehren, und fragen, was demnach das logarithmische Differentiale von $y+1$ seye? Die Antwort ist leicht; dann weil das logarithmische Differentiale von $1 = d1 = \frac{1}{1} = 0$; so wird

$$\text{das von } y+1 \text{ seyn } \frac{dy}{y+1} = dy \cdot \frac{1}{y+1}.$$

Nun ist $\frac{1}{y+1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ u. s. w. §. 73.

$$\text{folglich } \frac{dy}{y+1} = dy - y dy + y^2 dy - y^3 dy + y^4 dy$$

und sein In-

$$\text{tegrale oder } \int \frac{dy}{y+1} = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \text{ u. s. w.}$$

und warum
zu Erhaltung
dieser Pro-
gression die
gegebene
Größe bald
um eins ver-
mehrt bald
vermindert
werden muß;
s.

In welchem Fall die gegebene Größe um 1 vermehrt worden ist; man siehet leicht, daß sie auch um 1 vermindert werden könne, da dann die Zeichen $+$ und $-$ nicht abwechseln. §. 73. Die Ursache, warum man die gegebene Größe bald um 1 vermehren oder vermindern muß, erhelle

Differential- u. Integralrechnung. 575

daraus, weil man sonst die Glieder der Reihe, die ins unendliche fortgeht, nicht bestimmen könnte; daß es aber eine solche Reihe geben müsse, ersiehet man aus der gewöhnlichen Integralregel; dann wenn

$\frac{dy}{y}$ nach der allgemeinen Regel integrirt

werden solle, so habe ich, weil

$$\frac{dy}{y} = y^{-1} dy$$

$$\text{das Integrale } \frac{y^{-1+1} dy}{-1+1} = \frac{y^{-1+1}}{-1+1}$$

$$= \frac{y^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Dieser allgemeine

Ausdruck, der mich zwar auf eine unendliche Reihe überhaupt weist, zeigt mir nichts destoweniger noch keine bestimmte Glieder der Reihe an, nach welchen ich das Integrale durch die Approximation finden könnte. Daher pflegt man, die Glieder der Reihe zu bestimmen, die gegebene Grösse um 1 bald zu vermehren bald zu vermindern, je nachdem es die Schillichkeit der Rechnung erfordert; Wenn man also z. E. die logarithmische Differentialgrösse $x/x dx$ zu integriren hätte, so setzt man $x=y+1$, folglich wird $dx=1(y+1)$ und $dx=dy+0=dy$; da sich dann nach den obigen Bestimmungen das Integrale in einer unendlichen Reihe richtig ergeben wird, wenn man

Wie man aus der Natur der Integralrechnung be-
weisen könne,
daß das logarithmische
Integrale eine solche
Progression überhaupt
geben müsse;

und wie be-
wegen die
Vermehrung
oder Ver-
minderung
um eins nö-
thig seye.

huc

nur bemerkt, daß, weil $y + 1 = x$ gesetzt wurde, hernach $y = x - 1$ in der Regel seye.

Von einigen Fällen, in welchen man die Differentialien noch einmal differenziren muß; se;

21. E. bey solchen krummen Linien, die ein punctum flexus contrarii haben.

Berner bey den aus der Evolution erzeugten krummen Linien u. s. w.

§. 223. Endlich und letzters gibt es auch noch manche Fälle, in welchen man nicht zurecht kommen kann, es seye dann, daß man die Differentialgrößen noch einmal u. s. w. differentiire. Wann man z. E. bey einer krummen Linie, dergleichen die Schlangendähnliche sind, den äußersten Punkt finden will, wo sich die Linie auf die eine oder die andere Seite lenket (punctum flexus contrarii) folglich die größte oder kleinste Semiordinate hat, so muß das Differentiale davon noch einmal differentiirt werden; der Fall ist nemlich dieser, wenn die krumme Linie zuerst ihre hohle und hernach die convexe Seite, oder umgekehrt, der Ase zulehret; da dann das differentiirte Differentiale entweder positiv oder negativ werden muß, wie man aus der 71. Fig. begreift, wenn man nur mit MP und mR im Sinn Parallellinien ziehet, in welchem Fall die verlängerte Tangente das sogenannte Differentio-Differentiale abschneiden und bestimmen wird. Eine ähnliche Beschaffenheit hat es mit den sogenannten Evoluten, und den durch die Evolution erzeugten krummen Linien; deren Berechnung abermal auf der Kunst Differentialien zu differenziren beruhet. Eugenius hat diese Art krum-

Differential- u. Integralrechnung. 577

Krummer Linien zuerst mit einem besou-
 dern Rahmen belegen, und ihren Nutzen
 bey den oscillirenden Uhren in der Mecha-
 nik gezeigt. Den allgemeinen Begriff ^{Der allge-}
 davon kann man sich leicht bilden, wenn ^{meine Begrif}
 man eine Schnur oder einen Faden, der ^{solcher Li-}
 um eine krumme Linie, z. E. um einen ^{nen, die aus}
 Cirkel herumgewunden ist, nach und nach ^{der Evolu-}
 so abwindet, daß die abgewundene Schnur ^{tion erzeugt}
 immer eine gerade Linie, und gleichsam der ^{werden, wird}
 beständig veränderte Radius der krum-
 men Linie wird, welche sich durch diese
 Evolution erzeugt. Herr von Leibniz
 hat diese Linie den Radium osculi ge-
 nannt, daher die Evolute, oder diejenig-
 e krumme Linie, von welcher die Schnur
 abgewunden wird, der geometrische Ort
 von allen diesen Radiis in Rücksicht auf
 ihre Mittelpunkte ist. Wir haben zwei ^{Wie es noch}
 Gattungen von krummen Linien nam- ^{mehr derglei-}
 haft gemacht, bey welchen man die Dif- ^{den Linien}
 ferentio-Differentialien nöthig hat; Es ^{gebe, bey wel-}
 ist aber ohne unser Erinnern klar, daß es ^{den die Dif-}
 deren noch mehrere geben muß; von de- ^{Differentia-}
 nen wir aber, alle Weitläufigkeit zu ver- ^{tion ange-}
 meiden, nichts weiter melden, und nur ^{wandt wird;}
 zum Beschluß noch zeigen wollen, wie ^{was Diffe-}
 man dann ein Differentiale von neuem ^{rentio Diffe-}
 differentiirt. Die ganze Kunst bestehet ^{rentialien}
 in der Reduction, die wir vortragen wer- ^{seyn;}
 den, wenn wir zuvor von der Art und ^{und wie man}
 Weise, wie ein Differentio, Differentia- ^{auch die Dif-}
 ferentio, Differen- ^{ferentio, Dif-}

Differentialien
von neuem
differenziren
können;

dahero es
solche Diffe-
rentialien
vom ersten,
zweiten,
dritten Grad
u. s. w. gibt;

wie man sie
schreibe und
ausdrücke;

die Differen-
tio, Differen-
tiation hat
eben die Re-
geln, welche
die Differen-
tialien vom
ersten Grad
befolgen;

wie ein Dif-
ferentialpro-
duct von
neuem diffe-
renziert wer-
de;

le ausgedrückt wird, das nöthigste gesagt haben. Gleichwie das Differentiale von x genannt wird dx , so schreibt man das Differentiale von dx wiederum ddx , und das von ddx heißt $ddd x$. Damit man sich nun kürzer ausdrücke, so schreibt man statt ddx nur $d^2 x$, und statt $ddd x$, $d^3 x$ u. s. w. Es gibt dahero verschiedene Gattungen von Differentialien; dann dx ist eines vom ersten Grad, $d^2 x$ vom zweiten, $d^3 x$ vom dritten Grad u. s. w. Wenn man nun eine gegebene Grösse wirklich differentio, differentiiren will, dann so heißt man diese Rechnung, so wird die Operation nach eben denjenigen Regeln gemacht, nach welchen man die Differentiation vom ersten Grad verrichtet. Das wollen wir jetzt beweisen. Es kommt auch hier alles auf die Differentio: Differentiation zweyer sich multiplicirenden Grössen an. Z. E. man solle $x dx$ noch malen differentiiren. Man setze

$$x dx = z; \text{ so hat man}$$

$$dx = \frac{z}{x} \quad \text{folglich}$$

$$d^2 x = \frac{xdz - zdx}{x^2} \quad \S. 205.$$

$$\frac{\quad}{\quad} \cdot x^2$$

$$x^2 d^2 = xdz - zdx$$

$$zdx = zdx \quad \text{addirt}$$

zdx

Differential u. Integralrechnung. 579

$xdx + x^2 d^2x = xdz$, da nun gesetzt wurde $z = xdx$ so ist, wenn man gleiches für gleiches setzt, wird durch die Redu-
ction gezeigt, und daraus die allgemei-
ne Regel nochmalen bekräftiget;

$$xdxdx + x^2 d^2x = xdz$$

-----:x

$dx dx + x d^2x = dz$ das Differentio-
Differentiale von xdx , und weil $dx dx$
kürzer ausgedruckt dx^2 heißt, so ist der
nochmalen differenzirte Ausdruck von
 $xdx = dx^2 + x d^2x$, das ist, dx multi-
plicirt ins Differentiale von x , und x multi-
plicirt in das neue Differentiale von dx ;
dahero ist die Differentio: Differentia-
tionsregel mit der Differentiationsregel
einerley. Wie man nun durch die Res-
duction alles differenziren kann, wenn
man ein Product zweier Grössen zu differ-
renziren weiß; so wird man auch in die-
ser letztern Rechnung die Potenzen der Dif-
ferentialien, u. s. w. leicht differenziren
können. Z. E. das Differentiale von dx^2
ist $= 2 dx d^2x$ aus eben dem Grunde,
aus welchem das Differentiale von x^2 u. s. w.
 $= 2x dx$. Das von $dy^2 = 2dy d^2y$, u. s. w.
Eben so geht es bey der Division; dann
das Differentio: Differentiale von $\frac{x}{dx}$

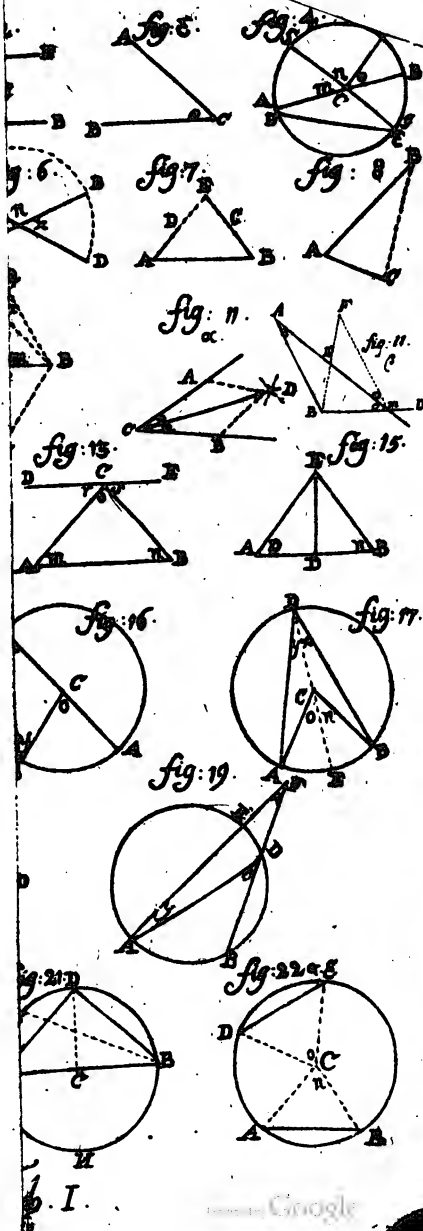
wird seyn $\frac{dx^2 - x d^2x}{dx^2}$ u. s. w. §. 205. Diß ist

nun das wichtigste und vornehmste, was
wir von dieser lehre sagen wollten. Ei-

Beschluß des
ganzen
Werks.

nem aufmerksamen Leser wird nichts un-
verständlich vorkommen, wenn er sich die-
se Sätze bekannt gemacht hat, und he-
nach auch selbst in der anwendenden Ma-
thematik sich umsehen will. Wir glau-
ben daher die sogenannte reine Ma-
thematik oder die erste Gründe aller ma-
thematischen Wissenschaften also vorgetra-
gen zu haben, daß sowohl Leser als
Zuhörer ihr Verlangen dadurch
stillen können.





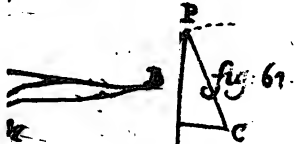
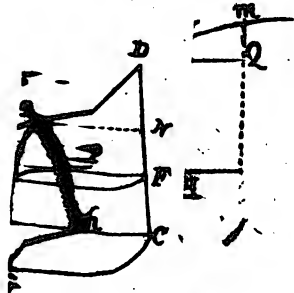


Fig: 67

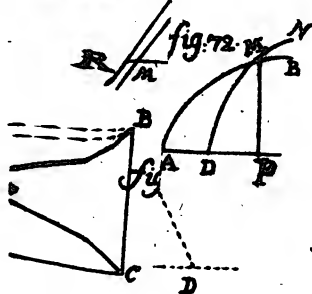
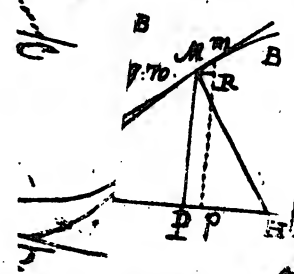


Fig: 64



Anim

